Bruchgleichungen

Zuerst wird der Hauptnenner gesucht:

$$\frac{1}{6}+\frac{14}{15}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{14}{3\cdot 5} \Rightarrow HN = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$$

$$\frac{3}{2x}-\frac{2}{x^2}=\frac{3}{2x}-\frac{2}{x\cdot x} \Rightarrow HN = 2x^2 \text{ und nicht } 2x^3$$

$$\frac{5x}{x-1}+\frac{x-7}{x^2-x}=\frac{5x}{x-1}+\frac{x-7}{x(x-1)} \Rightarrow HN = x(x-1)$$

und nicht $(x-1)(x^2-x)$

$$\frac{5x}{x^2+2x}-\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{5x}{x(x+2)}-\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{5}{x+2}-\frac{1}{x+2}$$

$\Rightarrow HN = x+2$ und nicht $(x^2+2x)\cdot(x^2-4)$

Einfaches Beispiel:

$$\frac{4}{x}-\frac{1}{x+1}=1 \qquad |\cdot x(x+1)$$

$$x\cdot(x+1)\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=1\cdot x\cdot(x+1)$$

$$\frac{4\cdot x\cdot(x+1)}{x}-\frac{1\cdot x\cdot(x+1)}{x+1}=x^2+x$$

$$4\cdot(x+1)-x = x^2+x$$

$$4x+4-x = x^2+x$$

$$3x+4 = x^2+x$$

$$x^2-2x-4=0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot(-4)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot 5}}{2}$$

$$=\frac{2\pm 2\sqrt{5}}{2}=\frac{2(1\pm\sqrt{5})}{2}=1\pm\sqrt{5}$$

$$L=\{1-\sqrt{5}\,;\,1+\sqrt{5}\}$$

zweites Beispiel:

$$\frac{7}{x^2+3x} - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\frac{7}{x(x+3)} - \frac{2}{x \cdot x} = 0 \qquad \Big| \cdot x^2(x+3)$$

$$x^2 \cdot (x+3) \cdot \left(\frac{7}{x(x+3)} - \frac{2}{x^2} \right) = 0 \cdot x^2 \cdot (x+3)$$

$$\frac{7x^2(x+3)}{x(x+3)} - \frac{2x^2(x+3)}{x^2} = 0$$

$$7x - 2 \cdot (x+3) = 0$$

$$7x - 2x - 6 = 0$$

$$5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$L = \left\{ \frac{5}{6} \right\}$$

aber nicht so:

$$\frac{7}{x^2+3x} - \frac{2}{x^2} = 0 \qquad \Big| \cdot x^2(x^2+3x)$$

$$\frac{7 \cdot x^2(x^2+3x)}{x^2+3x} - \frac{2(x^2+3x)x^2}{x^2} = 0 \cdot x^2(x^2+3x)$$

$$7x^2 - 2(x^2+3x) = 0$$

$$7x^2 - 2x^2 - 6x = 0$$

$$5x^2 - 6x = 0$$

$$x(5x-6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x_2 - 6 = 0$$

$$x_2 = \frac{6}{5}$$

denn die Probe gibt: 1) $\frac{7}{0+0} - \frac{2}{0} = \frac{7}{0} - \frac{2}{0}$ ist nicht definiert

2) $\frac{7}{(1{,}2)^2 + 3 \cdot 1{,}2} - \frac{2}{(1{,}2)^2} = 0$ wie verlangt ✓

also $L = \left\{ \frac{6}{5} \right\}$

Wer am Wert des Hauptnenners zweifelt, löse folgende Gleichung, ohne diesen vorher zu ermitteln.

$$\frac{3}{2x^2-6x} - \frac{4x+12}{x^2-9} = 1$$

$$\frac{3}{2x(x-3)} - \frac{4\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)} = 1$$

$$\frac{3}{2x(x-3)} - \frac{4}{x-3} = 1 \qquad \Big|\cdot 2x(x-3)$$

$$\frac{3\cdot 2x\cdot(x-3)}{2x(x-3)} - \frac{4\cdot 2x(x-3)}{x-3} = 1\cdot 2x(x-3)$$

$$3 - 8x = 2x^2-6x$$

$$2x^2+2x-3 = 0$$

$$x_{1|2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 2\cdot(-3)}}{4} = \frac{-2\pm\sqrt{28}}{4}$$

$$= \frac{-2\pm 2\sqrt{7}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

$$L = \left\{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{7}\,;\, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7}\right\}$$