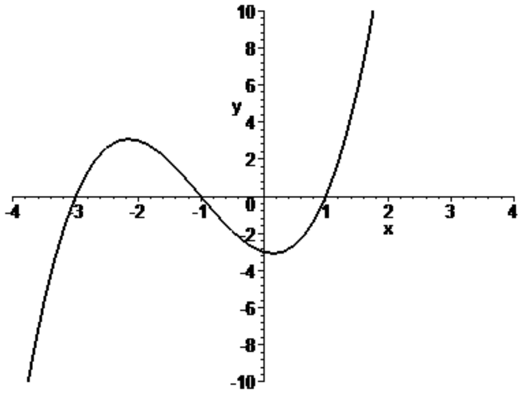
Funktionen können Nullstellen, Extremstellen, Sattelstellen, Wendestellen, Polstellen bzw. deren Schaubilder (Kurven) können Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrempunkte (globale oder lokale), Sattelpunkte, Wendepunkte, Polasymptoten besitzen und symmetrisch sein.

Ganz-Rationale Funktionen

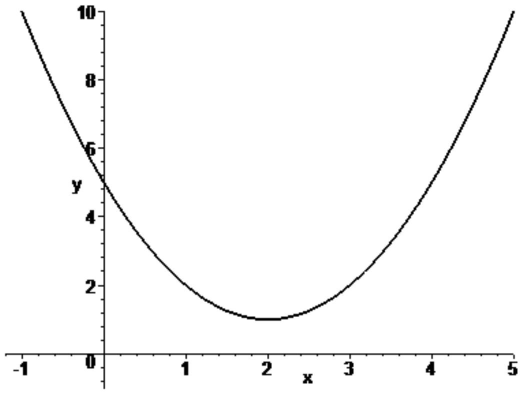
$f: x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$ für jede natürliche Zahl n, also genau $n \in \mathbb{N}_0$. Die größte Potenz n heißt Grad der Funktion. Die Anzahl ihrer Nullstellen ist höchstens so groß wie ihr Grad, es sei denn n=a_0=0.
Ihr Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ hat drei Nullstellen, einen Wendepunkt und zwei lokale Extrempunkte. Die Kurve ist nebenan.



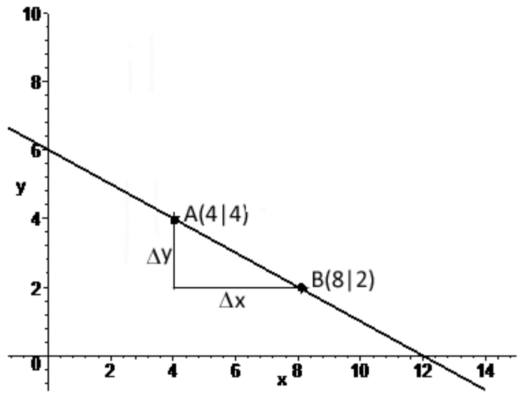
$f(x) = x^2 - 4x + 5$ hat keine Nullstellen, keinen Wendepunkt aber ein globales Minimum. Das Schaubild ist nebenan.

Durch quadratische Ergänzung lässt sich dies überführen in $f(x) = (x-2)^2 + 1$ und der Scheitelpunkt der Kurve (hier Tiefpunkt) S(-(-2)|1) = S(2|1) lässt sich an dieser Form ablesen.



$g(x) = -0,5 \cdot x + 6$ ist der Funktionterm einer linearen Abbildung. Das Schaubild $y = -0,5 \cdot x + 6$ ist also eine Gerade der Form $y = m \cdot x + c$.

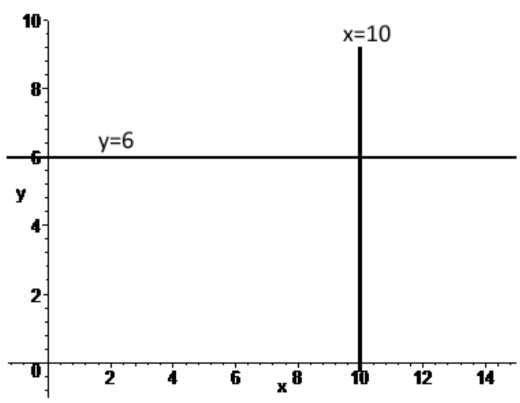
Dabei ist c die y-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse (y-Achsen-Abschnitt), hier 6. Die Steigung der Gerade ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4-2}{4-8} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = \frac{6-0}{0-12}$ es können offensichtlich auch die Schnittpunkte mit den Achsen $S_y(0|6)$ und $S_x(12|0)$ benutzt werden.



Zwei besondere Vertreter der Geraden sind:

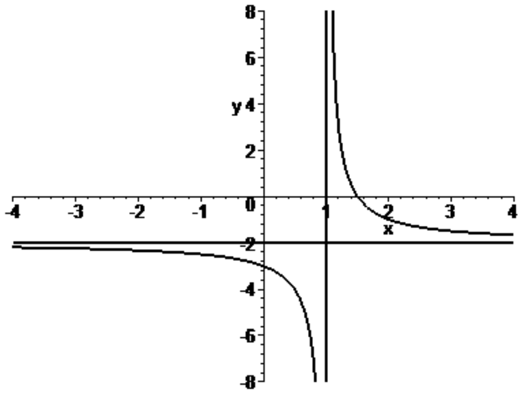
Die Funktion z.B. mit den Funktionswerten $g(x) = 6$, mit dem Schaubild y=6, also Parallelen zur x-Achse.

<u>Kein</u> Schaubild einer Funktion ist z.B. $x = 10$, eine Parallele zur y-Achse. Diese Punktmenge kann <u>keine</u> Funktion sein, weil <u>nicht</u> jedem x-Wert <u>genau ein</u> y-Wert zugeordnet ist.



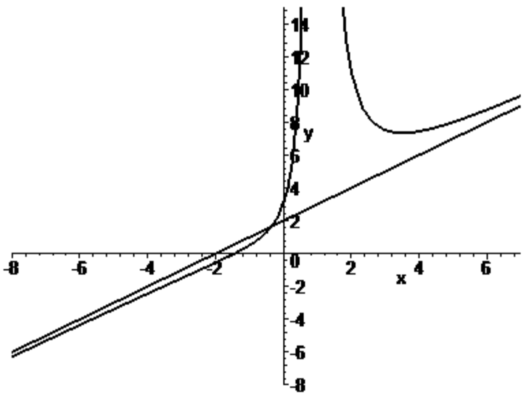
Gebrochen-Rationale-Funktionen

$f: x \rightarrow \frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0}{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot x^1 + b_0} = \frac{Zähler}{Nenner}$ für jede natürliche Zahl n, m, also genau für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}.$, $m = 0$ ist eigentlich nicht möglich, diese Funktion wäre ganz-rational. Die Gebrochen-Rationalen-Funktionen haben überall dort ein Problem, wo ihr Nenner Null wird, also bei $b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot x^1 + b_0 \cdot x^0 = 0$. Alle Nullstellen des Nenners werden aus der Definitionsmenge ausgeschlossen, $D = \mathbb{R} \setminus \{Nullstellen\ des\ Nenners\}$, und jede Nullstelle des Nenners muss darauf hin untersucht werden, ob dort eine Polstelle oder eine hebbare Lücke vorliegt.



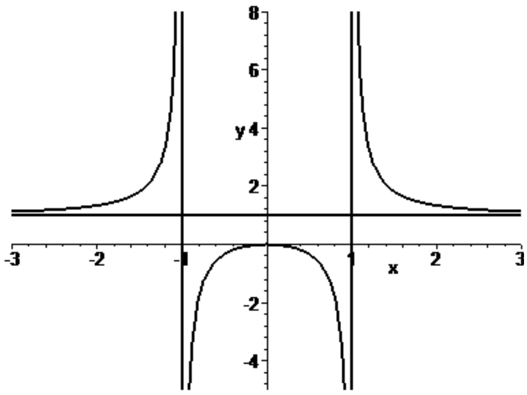
$f(x) = \frac{-2x+3}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 2$

Bei der Bestimmung von Asymptoten hilft meist die Polynomdivision

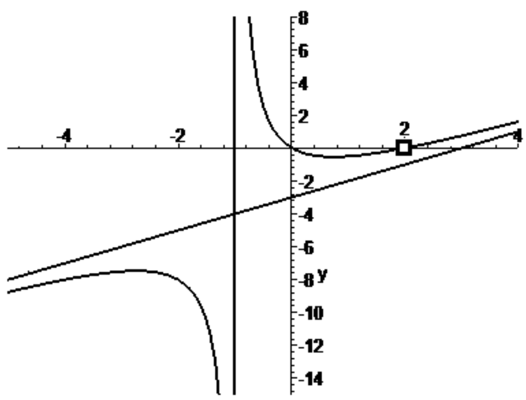


$f(x) = \frac{x^3+3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{x+1}{(x-1)^2}$

Hier mit unerwartetem Wendpunkt, so dass die Asymptote geschnitten werden muss um sich ihr für $x \rightarrow -\infty$ zu nähern.



$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$



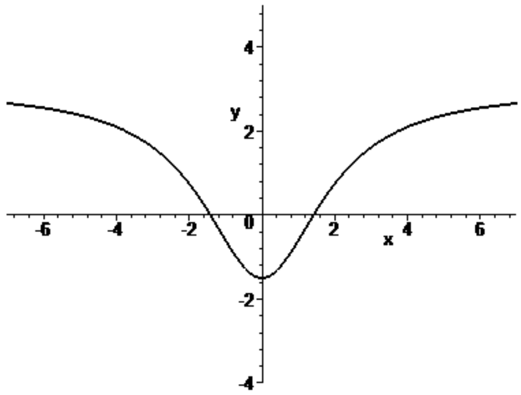
$f(x) = \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-x-2} = \frac{x \cdot (x-2)^2}{(x+1) \cdot (x-2)} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

hat erstaunlicher Weise nur eine Polstelle bei x= -1, an der Stelle x = 2 ist eine hebbare Lücke.

Die Funktion verhält sich also wie $h(x) = \frac{x(x-2)}{x+1}$

$f(x)=\frac{3x^2-6}{x^2+4} \qquad D=\mathbb{R}$

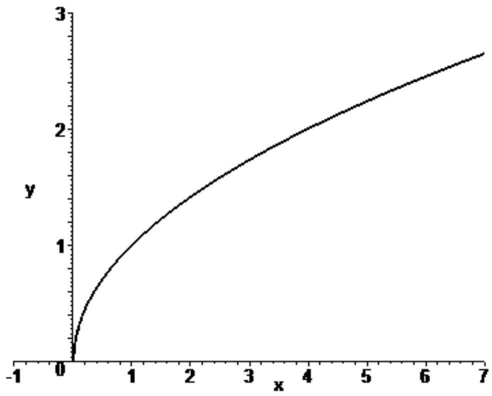
Es gibt auch polfreie gebrochen-rationale Funktionen.
Polynomdivision



Wurzel-Funktionen

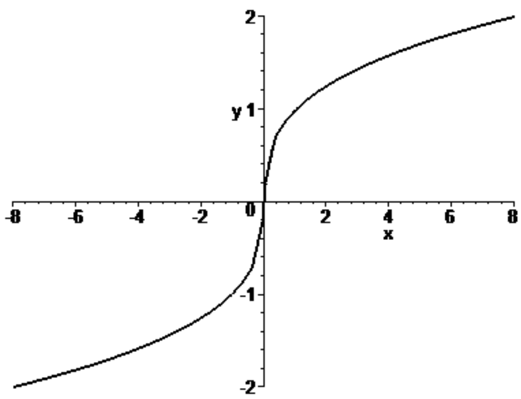
$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \qquad D=\mathbb{R}_0^+=\{x\in\mathbb{R}|x\geq 0\}$

Das Argument unter der Wurzel darf bei geradzahligen Wurzeln nicht kleiner als Null werden.

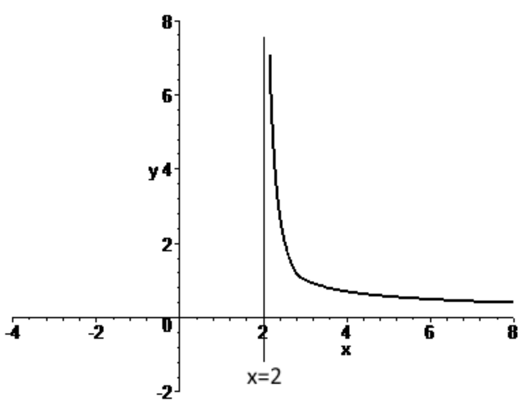


$f(x)=\sqrt[3]{x} \qquad D=\mathbb{R}$

Ungeradzahlige Wurzeln haben dieses Problem nicht.



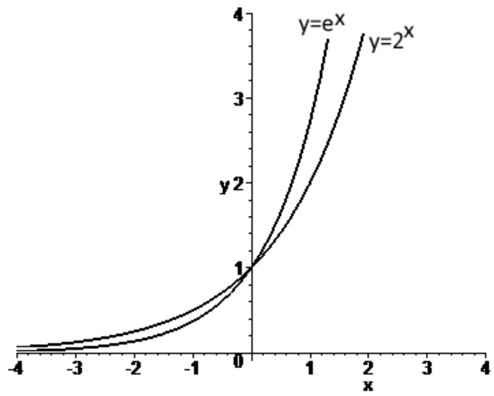
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}} \qquad D=\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}|x>2\}$



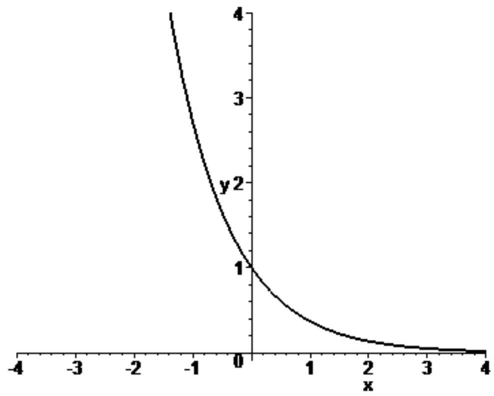
Exponential-Funktionen

$f(x) = e^x \qquad D = \mathbb{R}$
$g(x) = 2^x \qquad D = \mathbb{R}$

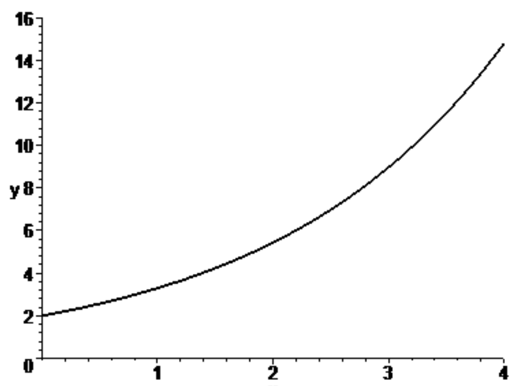
Die Kurven sind streng monoton steigend und alle Funktionswerte größer als Null.



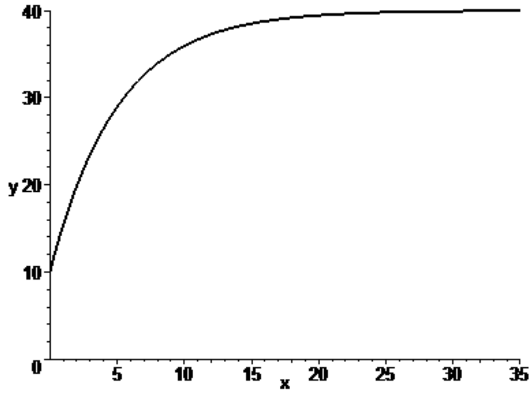
$f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad D = \mathbb{R}$
Die Kurve ist streng monoton fallend und alle Funktionswerte größer als Null.



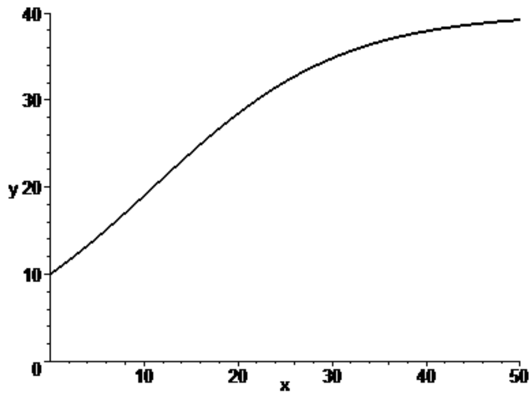
$f(t) = N \cdot e^{k \cdot t}$ N=$f(0)$=2 , k=0,5
Das exponentielle Wachstum zur Differenzialgleichung
$f'(t) = k \cdot f(t)$



$f(t) = S - c \cdot e^{-k \cdot t}$ N=10 , S=40 , c=S-N=30 , k=0,2
Das beschränkte Wachstum zur Differentialgleichung
$f'(t) = k \cdot (S - f(t))$



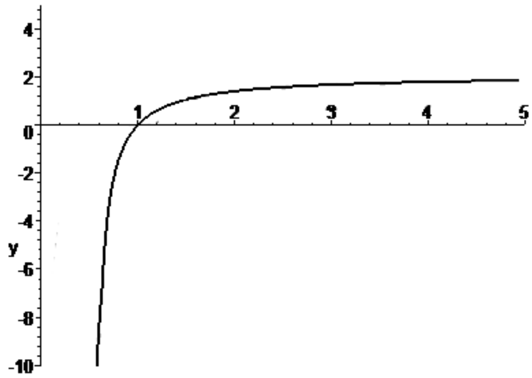
$f(t) = \frac{S}{1+a\cdot e^{-k\cdot t}}$ N=10 , S=40 , a=$\frac{S}{N}-1$=3 , k=$r\cdot S$=0,1
Das logistische Wachstum zur Differentialgleichung
$f'(t) = r \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$



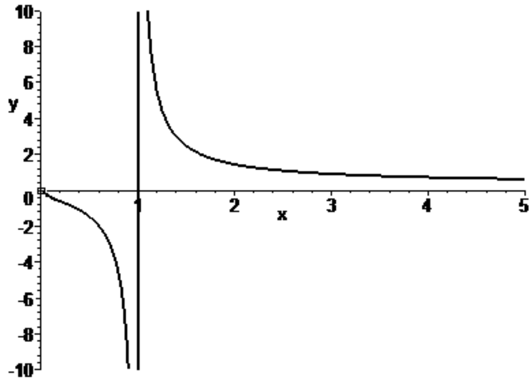
Logarithmus-Funktionen

$f(x) = \ln(x)$ $D = \mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Die Kurve ist monoton steigend und die Funktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.



$f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ $D = \mathbb{R}^{+} \backslash \{1\}$



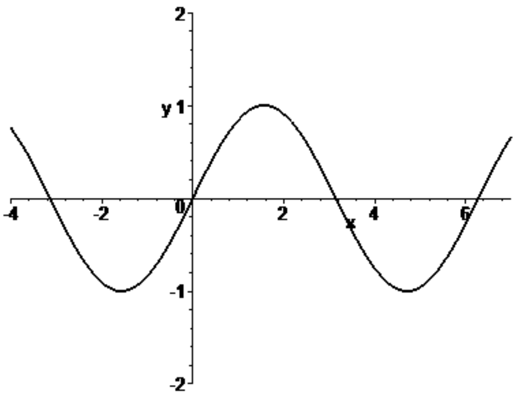
Trigonometrische-Funktionen

$f(x) = \sin(x) \qquad D = \mathbb{R}$

Nullstellen $x_k = k \cdot \pi \quad \textit{für } k \in Z$

Hochpunkte HP$(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,|\, 1) \quad \textit{für } k \in Z$

Tiefpunkte TP$(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,|\, \text{-}1) \quad \textit{für } k \in Z$

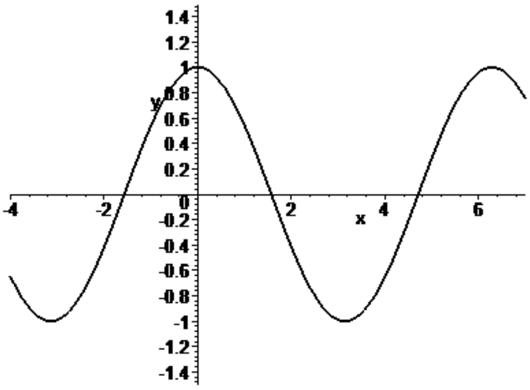


$f(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \qquad D = \mathbb{R}$

Nullstellen $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \textit{für } k \in Z$

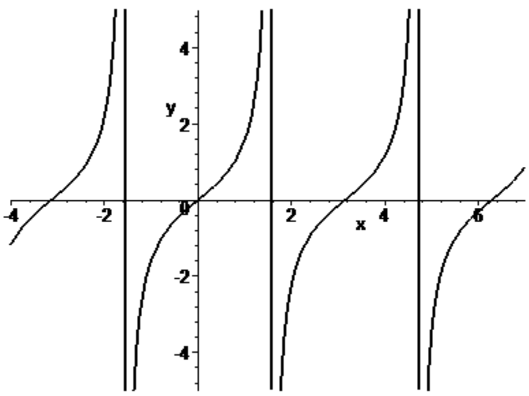
Hochpunkte HP$(2k\pi \,|\, 1) \quad \textit{für } k \in Z$

Tiefpunkte TP$(\pi + 2k\pi \,|\, \text{-}1) \quad \textit{für } k \in Z$



$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} - k \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\} \textit{ für } k \in \mathbb{N}$

Nullstellen $x_k = k \cdot \pi \quad \textit{für } k \in Z$



$f(x) = a \cdot \sin(k \cdot x + d)$

a=2 vergrößert die Amplitude auf a=2

k =3 die Periodenlänge wird $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3} \approx 2,1$

d=$\frac{\pi}{4} \approx 0,79$ verschiebt das Schubild um $\frac{\pi}{4}$ nach links.