Geometrie

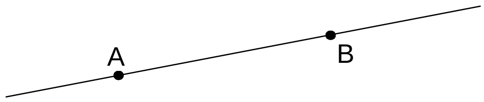
Punkt $P(x_P|y_P)$ ist ein Punkt im 2-dimensionalen karthesischen Koordinatensystem, früher hieß

x_P Abszisse heute x-Koordinate
y_P Ordinate heute y-Koordinate

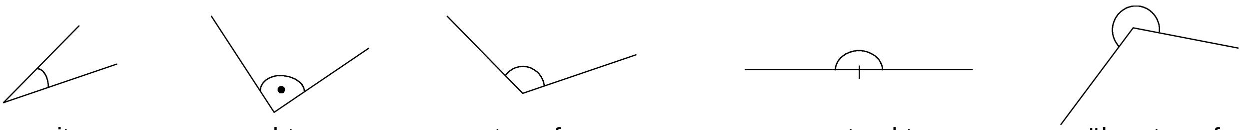
Abstand der Punkte A und B $d(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Die **Strecke** AB hat die Länge $|AB|$

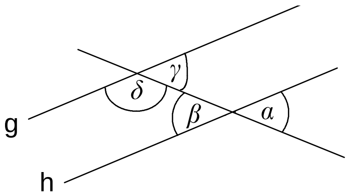
Die **Gerade** (AB) reicht beliebig weit über die Punkte A und B hinaus



Winkel

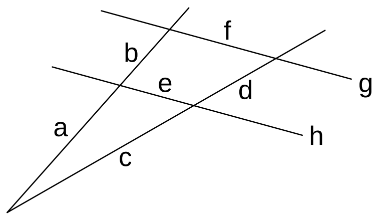


spitzer Winkel	rechter Winkel 90^o	stumpfer Winkel	gestreckter Winkel 180^o	überstumpfer Winkel



Stufenwinkel $\alpha = \gamma$ Voraussetzung: g und h sind parallel
Wechselwinkel $\beta = \gamma$
Scheitelwinkel $\alpha = \beta$
(Gegenwinkel $\alpha = \beta$)
Nebenwinkel $\gamma = 180° - \delta$

Strahlensätze



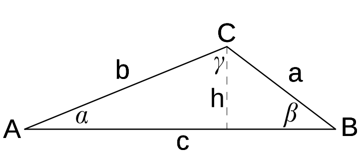
Voraussetzung: g und h sind parallel

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\frac{f}{a+b} = \frac{e}{a}$ oder $\frac{e}{c} = \frac{f}{c+d}$

Dreiecke

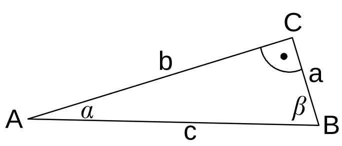
beliebig



$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$

$A = \frac{1}{2}hc$

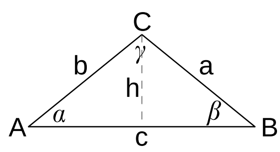
rechtwinklig



$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$
$\gamma = 90^o$

$A = \frac{1}{2}ab$
$c^2 = a^2 + b^2$

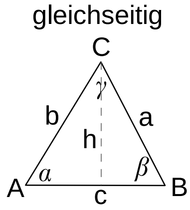
gleichschenklig



$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$
$\alpha = \beta$
$a = b$

$A = \frac{1}{2}hc$

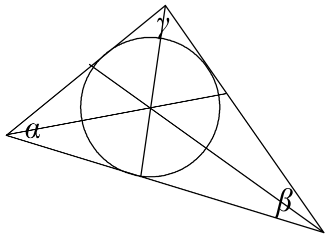
gleichseitig



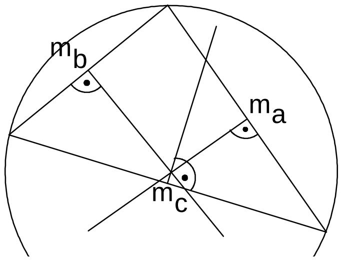
$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$
$\alpha = \beta = \gamma = 60^o$
$a = b = c$

$A = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

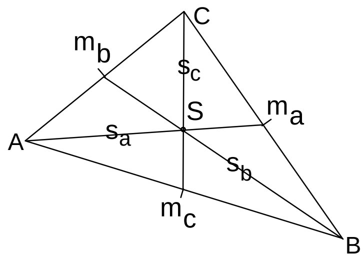
Besondere Linien im beliebigen Dreieck



Die **Winkelhalbierenden** schneiden sich im **Inkreis-mittelpunkt** des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises.

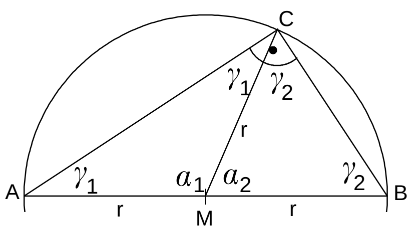


Die **Mittelsenkrechten** auf die **Mitten der Seiten** schneiden sich im **Umkreismittelpunkt** des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises. Auf diesem Kreis liegen alle drei Eckpunkte des Dreiecks. Der Umkreismittelpunkt kann auch außerhalb des Dreiecks liegen.



Die **Seitenhalbierenden** s_a, s_b, s_c schneiden sich im **Schwerpunkt** des Dreiecks. Der Schwerpunkt S teilt alle Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1

Satz des **Thales**



Jedes Dreieck ABC, dessen dritter Eckpunkt C auf dem Halbkreis mit Radius r über der Seitenmitte M der Seite AB liegt ist rechtwinklig.

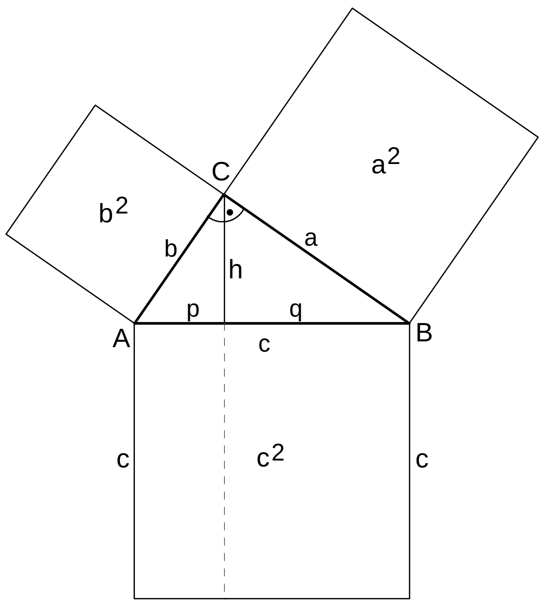
AMC ist gleichseitig $\Rightarrow\ 2\gamma_1 + \alpha_1 = 180^o \ \Rightarrow\ \gamma_1 = 90^o - \frac{\alpha_1}{2}$

CMB ist gleichseitig $\Rightarrow\ 2\gamma_2 + \alpha_2 = 180^o \ \Rightarrow\ \gamma_2 = 90^o - \frac{\alpha_2}{2}$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 180^o \ \Rightarrow\ \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = 90^o$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 180^o - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2} = 180^o - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = 180^o - 90^o = 90^o$$

Rechtwinkliges Dreieck



Voraussetzungen: $\sphericalangle(ACB) = \gamma = 90^o$
$c = p + q$
h ist die Höhe von C auf c

Höhensatz

$$h^2 = p \cdot q$$

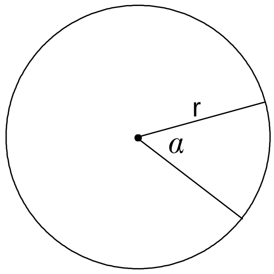
Kathetensätze

$$b^2 = p \cdot c$$
$$a^2 = q \cdot c$$

pythagoräischer Lehrsatz

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Kreis

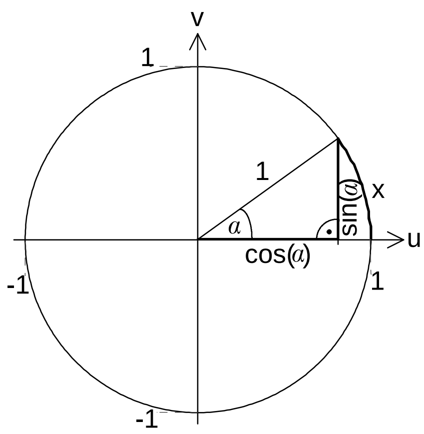


Umfang $U = 2\pi r$

Fläche $A = \pi r^2$

Kreisausschnitt $A_\alpha = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^o}$

Rechtwinkliges Dreieck im Einheitskreis - Trigonometrie



Im **Einheitskreis** (Radius 1 LE) ist die Ankatete die Dreiecksseite am Winkel α und die Gegenkatete die Dreiecksseite gegenüber dem Winkel α. Die Hypothenuse hat die Länge 1 und das Dreieck ist rechtwinklig.

Der **Sinus** ist die Länge der Gegenkatete $\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$

Der **Cosinus** ist die Länge der Ankatete $\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$

Der **Tangens** ergibt sich aus $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}}{\frac{Ankathete}{Hypotenuse}}$

$= \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} \cdot \frac{Hypotenuse}{Ankathete}$

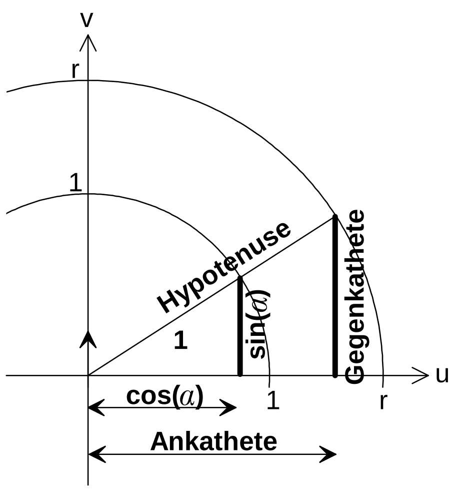
$= \frac{Gegenkahtete}{Ankathete}$

Das **Bogenmaß** (Radialmaß) x ist die Länge der vom Winkel α überstrichenen Strecke auf dem **Einheits-kreis**. Zwischen Winkelmaß und Bogenmaß ergibt sich durch den Vollwinkel 360° und den Vollbogen $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ folgender Zusammenhang: $\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^o}$

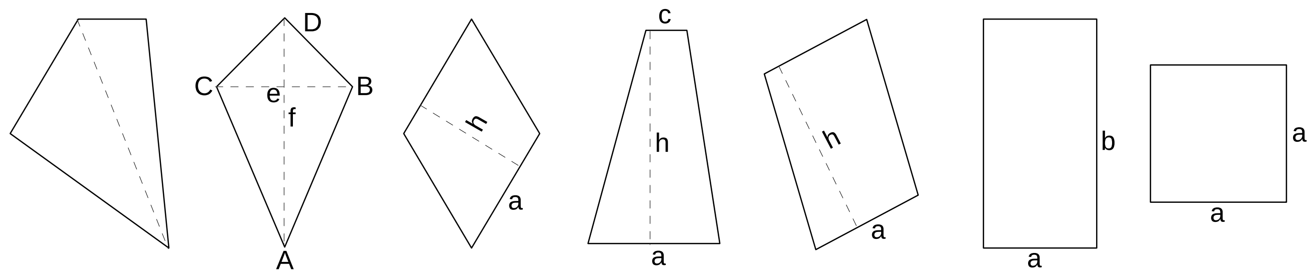
Mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes $a^2 + b^2 = c^2$ folgt für Radius 1 Le daraus $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Diese Festlegungen für sin, cos, tan gelten im rechtwinkligen Dreieck, dank der Strahlensätze, selbstverständlich auch innerhalb eines Kreises mit beliebigem Radius r.

Für einen Kreis mit Radius r folgt deshalb mit Hilfe des Strahlensatzes
$\frac{x_r}{x_1} = \frac{r}{1} \Leftrightarrow x_r = x_1 \cdot r = \frac{2\pi\alpha}{360^o} \cdot r$



Vierecke

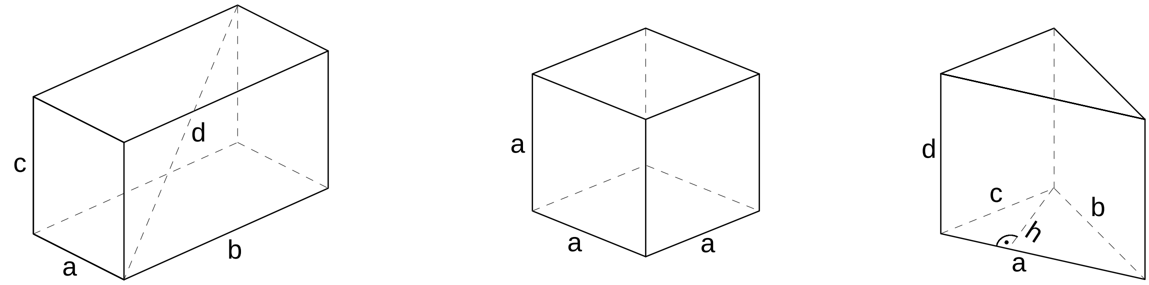


beliebiges Viereck | Drachen | Raute | Trapez | Parallelogramm | Rechteck | Quadrat

- beliebiges Viereck: $A = A_1 + A_2$; Zerlegung in zwei Dreiecke
- Drachen: $A = \frac{1}{2} e \cdot f$; $e = |AD|$; $f = |AC|$
- Raute: $A = \frac{1}{2} e \cdot f$; $A = a \cdot h$
- Trapez: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$
- Parallelogramm: $A = a \cdot h$
- Rechteck: $A = a \cdot b$
- Quadrat: $A = a^2$

Die Innenwinkelsumme in solchen Vierecken ist 360^o, ihr Umfang die Summe aller vier Kantenlängen.

Körper



Quader | Würfel | Prisma

Quader

$$V = Grundfläche \cdot Höhe$$
$$= abc$$
$$M = 2ac + 2bc = 2c(a+b)$$
$$O = 2c(a+b) + 2ab$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

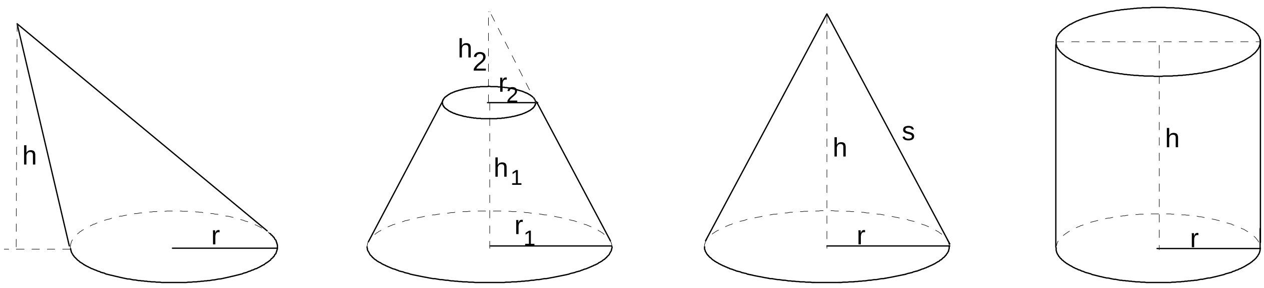
Würfel

$$V = a^3$$
$$M = 4a^2$$
$$O = 6a^2$$

Prisma

$$V = \frac{1}{2} ah \cdot d$$
$$M = da + db + dc$$
$$O = d(a+b+c) + ah$$

Kegel



Kegel | Kegelstumpf | senkrechten Kegel | Zylinder

Kegel

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Kegelstumpf

$$V = \frac{1}{3} \pi r_1^2 (h_1 + h_2) - \frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2$$
$$h_2 = \frac{r_2}{r_1 - r_2} \cdot h_1$$
mittels Strahlensatz

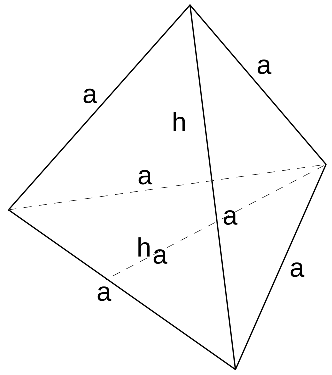
senkrechten Kegel

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$
$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$\frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$
$$M = \pi s^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$
$$O = \pi s^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} + 2\pi r^2$$

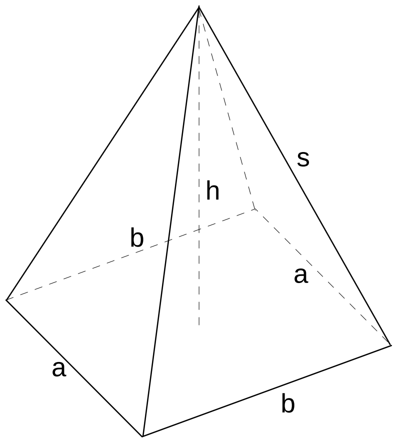
Zylinder

$$V = \pi r^2 \cdot h$$
$$M = 2\pi rh$$
$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

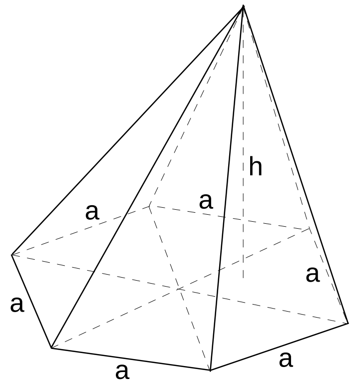
Pyramiden



Tetraeder



senkrechte rechteckige Pyramide



schiefe regelmäßig 6-eckige Pyramide

$h_a = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$, aufgeteilt 2:1

$h = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a$

$G = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2$

$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$

$M = \frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot a^2$

$O = \sqrt{3} \cdot a^2$

Alle Flächen stehen im Winkel α = 70,5° zu einander

$s = \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 + b^2) + h^2}$

$G = a \cdot b$

$V = \frac{1}{3}abh$

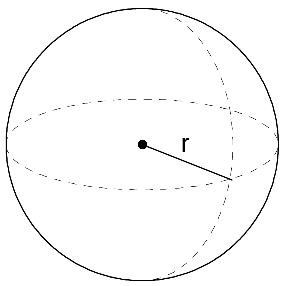
$M = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + h^2} + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + h^2}$

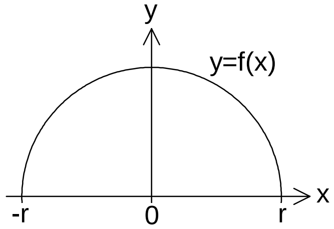
$O = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + h^2} + ab$

$G = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot a^2$

$V = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot ha^2$

Kugel





$V = \frac{4}{3}r^3$

$O = 4r^2$

Die Herleitung des Volumens gelingt am leichtesten durch Berechnung des Rotationsvolumens der Halbkreis-Randkurve $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ um die x-Achse.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \\
&= \pi \cdot \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 dx \\
&= \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} \\
&= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 - \left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right)\right) \\
&= \pi \cdot \left(2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{6r^3}{3} - \frac{2r^3}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}
$$

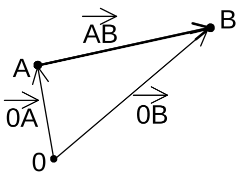
Die Oberfläche ergibt sich durch Berechnung des Differentials von V(r) nach r, also durch Ableiten von V(r) nach der Variablen r.

$$O = \frac{d(V(r))}{dr} = \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{dr} = 4\pi r^2$$

Vektor-Geometrie

Vektor

Ein Vektor ist ein Repräsentant der Verschiebung des 1-, 2-, **3-**, oder n-dimensionalen Punktraumes und bildet den Raum eindeutig und umkehrbar auf sich selbst ab. Vektoren haben eine eindeutige Länge und eine eindeutige Richtung.



$A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Das Produkt eines Vetors $\vec{a}$ mit einer positiven reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ verlängert den Vektor um den Faktor r auf die Länge $r \cdot \vec{a}$ die Richtung bleibt dabei erhalten.
Das Produkt eines Vetors $\vec{a}$ mit einer negativen reellen Zahl $s \in \mathbb{R}$ verlängert den Vektor um den Faktor s auf die Länge $s \cdot \vec{a}$ und kehrt seine Richtung um.
Das Produkt eines Vetors $\vec{a}$ mit 0 macht den Vektor zum Nullvektor $\vec{0}$.

Die Länge des Vektors $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ ist $\left|\vec{c}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Lineare Unabhängigkeit

Zwei oder drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$sind **linear unabhängig**, wenn für $r, s, t \in \mathbb{R}$ gilt: $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{0}$ (für zwei)
hat außer der trivialen Lösung $r = s = t = 0$ keine weiteren Lösungen.
Bei der Suche weiterer von 0 verschiedener Lösungen kann o.B.d.A die Anzahl der Variablen r, s, t um eine reduziert werden.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt mit t=1:

$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$$\begin{array}{lll} r - 2s + 5 = 0 & r - 2s + 5 = 0 \;\Rightarrow & -3 - 2s + 5 = 0 \quad s = 1 \\ 2r + s + 5 = 0 & \Rightarrow\; 5r \quad + 15 = 0 \;\Rightarrow & r = -3 \\ 3r + 3s + 6 = 0 & 3r + 3s + 6 = 0 & \text{einsetzen liefert } -9 + 3 + 6 = 0 \text{ eine wahre Aussage} \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear **abhängig**, da es mit (-3;1;1) außer (0;0;0) eine weitere Lösung der Gleichung gibt.
Gleichfalls gibt es damit soger beliebig viele weitere Lösungen (-3k;k;k) $\forall k \in \mathbb{R}$

$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + \vec{d} = \vec{0}$

$$\begin{array}{lll} r - 2s + 2 = 0 & r - 2s + 5 = 0 \;\Rightarrow & -\frac{2}{5} - 2s + 5 = 0 \quad s = \frac{23}{10} \\ 2r + s + 2 = 0 & \Rightarrow\; 5r \quad + 2 = 0 \;\Rightarrow & r = -\frac{2}{5} \\ 3r + 3s + 2 = 0 & 3r + 3s + 2 = 0 & \text{einsetzen liefert } -\frac{6}{5} + \frac{69}{10} + 2 = \frac{77}{10} \neq 0 \text{ eine falsche Aussage} \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ sind linear **unabhängig**

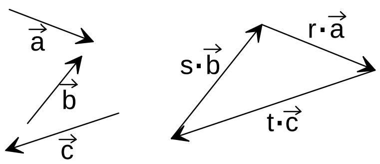
Die Untersuchung von zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$

$$r \cdot \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \text{ oder } s \cdot \vec{a} = \vec{b} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} s = -2 \\ 2s = 1 \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{2} \\ 3s = 3 \;\Rightarrow\; s = 1 \end{array}$$

ist eine falsche Aussage, da nicht alle drei Ergebnisse für s übereinstimmen

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ sind linear **unabhängig**

Dies lässt sich auch geometrisch deuten.



parallel antiparallel

Lineare Abhängigkeit bedeuted, dass sich Zahlen r, s, t finden lassen, so dass der Vektorzug $r\cdot\vec a + s\cdot\vec b + \vec d = \vec 0$ also ein **geschlossener Vektorzug** ist.

Für zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ bedeuted lineare abhängigkeit, dass sie entweder parallel oder antiparallel sind.

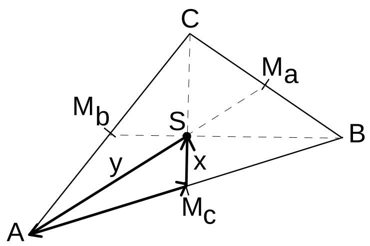
paarweise **lineare Unabhängigkeit**

Dies bezieht sich auf Paare von Vektoren, also jeweils zwei Vektoren und untersucht so in $\mathbb{R}^3$ lediglich, ob die beiden Vektoren parallel oder antiparallel sind.
Sind drei Vektoren $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ auf paarweise lineare Unabhängigkeit zu untersuchen, so bedeuted dies, dass die Paare $\vec a$, $\vec b$ und $\vec a$, $\vec c$ sowie $\vec b$, $\vec c$ jeweils getrennt von einander auf Parallelität zu prüfen sind.

Teilverhältnisse - der geschlossene Vektorzug

Es sind $\vec b = \overrightarrow{AB}$ und $\vec a = \overrightarrow{AC}$ zwei **linear unabhängige** Vektoren. Damit ist $\overrightarrow{BA} = -\vec b$ und $\overrightarrow{CA} = -\vec a$.

Zeige, dass der Schwerpunkt S alle Seitenhalbierenden eines Dreiecks im Verhältnis 2 : 1 teilt.



$\overrightarrow{AM_C} + \overrightarrow{M_CS} + \overrightarrow{SA} = \vec 0$ ist ein geschlossener Vektorzug, so dass die Summe aller Vektoren den Nullvektor ergibt.

$$\overrightarrow{AM_C} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM_C} = \tfrac{1}{2}\vec b$$

$$\overrightarrow{M_CS} = x\cdot\overrightarrow{M_CC} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_CS} = x\cdot\left(\overrightarrow{M_CA} + \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_CS} = x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{M_CS} = x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\vec b + \vec a\right)$$

$$\overrightarrow{SA} = y\cdot\overrightarrow{M_aA} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = y\cdot\left(\overrightarrow{M_aB} + \overrightarrow{BA}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_CS} = y\cdot\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{SA} = y\cdot\left(\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) - \overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = y\cdot\left(\tfrac{1}{2}\left(-\vec a + \vec b\right) - \vec b\right)$$

$$\overrightarrow{AM_C} + \overrightarrow{M_CS} + \overrightarrow{SA} = \vec 0$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\vec b + x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\vec b + \vec a\right) + y\cdot\left(\tfrac{1}{2}\left(-\vec a + \vec b\right) - \vec b\right) = \vec 0$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\vec b - \tfrac{1}{2}x\cdot\vec b + x\cdot\vec a - \tfrac{1}{2}y\cdot\vec a + \tfrac{1}{2}y\cdot\vec b - y\cdot\vec b = \vec 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}\right)\vec b + \left(\boldsymbol{x} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{y}\right)\vec a = \vec 0$$

da $\vec a$ und $\vec b$ linear unabhängig sind, müssen die Faktoren vor den Vektoren $\vec a$ und $\vec b$ unabhängig von einander Null ergeben.

$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y = 0$ also $\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x - x = 0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}x = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{3}$

$\boldsymbol{x} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}y = x$ $\Leftrightarrow y = 2x \Leftrightarrow y = \tfrac{2}{3}$

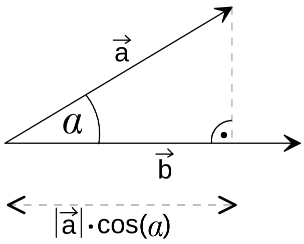
$\Rightarrow \overrightarrow{M_CS} = x\cdot\overrightarrow{M_CC} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{M_CC}$ *und* $\overrightarrow{SC} = \tfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{M_CC}$ $\Leftrightarrow$ S teilt M_CC im Verhältnis 1 : 2 oder 2 : 1

$\Rightarrow \overrightarrow{SA} = y\cdot\overrightarrow{M_aA} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{M_aA}$ *und* $\overrightarrow{M_aS} = \tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{M_aA}$ $\Leftrightarrow$ S teilt M_aA im Verhältnis 2 : 1 oder 1 : 2

Für den geschlossenen Vektorzug $\overrightarrow{M_CB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SM_C} = \vec 0$ ergibt sich analog das gleiche Ergebnis, also S teilt M_bB im Verhältnis 1 : 2 oder 2 : 1

Dies beweist, dass der Schwerpunkt S alle Seitenhalbierenden eines Dreiecks im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Skalarprodukt



Geometrisch verstehen wir unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren das Produkt der Länge des Vektors $\vec{b}$ mit der Länge der senkrechten Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\alpha)$$

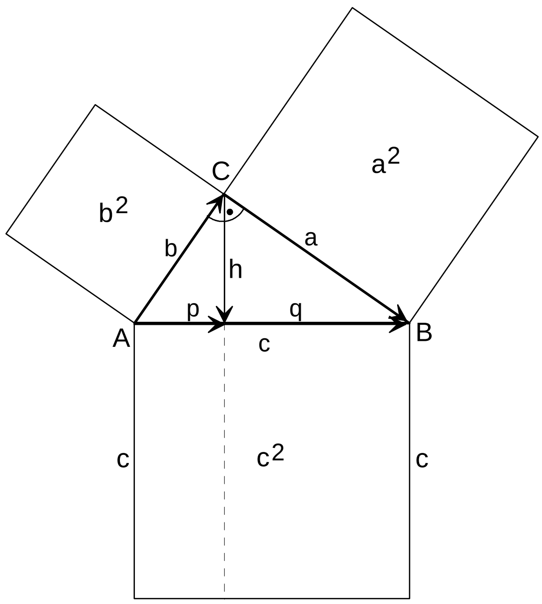
$$\Rightarrow\ \cos(\alpha) = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

eine wunderschöne Formel zur Bestimmung des Winkels zwischen zwei Vektoren. Der Betrag im Zähler sorgt dabei dafür, dass bei der Berechnung keine negativen Winkel auftauchen können. Gleichzeitig stellt man fest, dass dieses Produkt auch durch komponentenweise Multiplikation der Vektoren berechnet werden kann:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

Damit ist das Skalarprodukt zweier Vektoren erstaunlicher Weise <u>kein</u> Vektor sondern ein Skalar, also eine reelle Zahl.

Beweise mit senkrechten Vektoren



Es sei: $\sphericalangle(ACB) = \sphericalangle(hp) = \sphericalangle(hq) = 90^o$

$$\Rightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0 \ \wedge\ \vec{p}\,\vec{h} = 0 \ \wedge\ \vec{h}\,\vec{q} = 0$$

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{c} \quad \text{und} \quad \vec{h} = \vec{p} - \vec{b}$$

$$\vec{h} = \vec{a} - \vec{q}$$

$$\begin{aligned}
\vec{h}^2 &= \vec{h}\cdot\vec{h} = \left(\vec{p} - \vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} - \vec{q}\right) \\
&= \vec{p}\,\vec{a} - \vec{b}\,\vec{a} - \vec{p}\,\vec{q} + \vec{b}\,\vec{q} && \text{wobei } \vec{b}\,\vec{a} = 0 \\
&= \vec{p}\,\vec{a} - \vec{p}\,\vec{q} + \vec{b}\,\vec{q} \\
&= \vec{p}\,\vec{a} - \vec{p}\,\vec{q} + \vec{p}\,\vec{q} - \vec{p}\,\vec{q} + \vec{b}\,\vec{q} \\
&= \vec{p}\left(\vec{a} - \vec{q}\right) + \vec{p}\,\vec{q} + \left(\vec{b} - \vec{p}\right)\vec{q} \\
&= \vec{p}\,\vec{h} + \vec{p}\,\vec{q} - \vec{h}\,\vec{q} && \text{wobei } \vec{p}\,\vec{h} = 0 \text{ und } \vec{h}\,\vec{q} = 0 \\
&= \vec{p}\,\vec{q}
\end{aligned}$$

Dies beweist betragsmäßig $\vec{h}^2 = \left|\vec{p}\,\vec{q}\right|$ also den Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck $h = p\cdot q$

Und noch einfacher mit $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$ und $\sphericalangle(ACB) = 90^o$ ist:

$$\begin{aligned}
\vec{c}^2 &= \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 \\
&= \vec{a}^2 + 2\cdot\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2 && \text{wobei } \vec{a}\,\vec{b} = 0 \\
&= \vec{a}^2 + \vec{b}^2
\end{aligned}$$

Da es sich bei den Quadraten von Vektoren um Skalare, also reelle und in diesem Fall positive Zahlen handelt ist damit der Satz des Phythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ im rechtwinkligen Dreieck bewiesen.

.... to be continued