Bruchgleichungen

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+2} = 1 \quad | \cdot 2x(x+2)$

$$\frac{2x\cdot(x+2)}{2x} - \frac{2x(x+2)}{x+2} = 1\cdot 2x(x+2)$$

$$x + 2 - 2x = 2x^2 + 4x$$

$$-x + 2 = 2x^2 + 4x$$

$$0 = 2x^2 + 5x - 2$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$L = \left\{ \frac{-5+\sqrt{41}}{4} ; \frac{-5-\sqrt{41}}{4} \right\}$$

b) $\frac{3}{x^2} - 1 = -\frac{x^2}{x^2+3x}$

$$\frac{3}{x^2} - 1 = \frac{-x^2}{x(x+3)} \quad | \cdot x^2(x+3)$$

$$\frac{3\cdot x^2(x+3)}{x^2} - 1\cdot x^2(x+3) = \frac{-x^2\cdot x^2(x+3)}{x(x+3)}$$

$$3(x+3) - (x^3+3x^2) = -x^3$$

$$3x + 9 - x^3 - 3x^2 = -x^3 \quad | + x^3$$

$$-3x^2 + 3x + 9 = 0 \quad | : 3$$

$$-x^2 + x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-1)\cdot 3}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{-2} = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2}$$

$$L = \left\{ \frac{1-\sqrt{13}}{2} ; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

c) $\frac{x^2}{x^2-2x} - \frac{3x}{x-2} = 0$

$\frac{x^2}{x(x-2)} - \frac{3x}{x-2} = 0 \qquad | \cdot x(x-2)$

$x^2 - 3x \cdot x = 0$

$x^2 - 3x^2 = 0$

$-2x^2 = 0$

$x = 0$

Einsetzen von $x=0 \Rightarrow \frac{0}{0-0} - \frac{0}{-2} = \frac{0}{0} - 0$ ↯

Das ist nicht zulässig!

$L = \{\}$

d) $\frac{2x-3}{x+4} + \frac{11}{(x+4)^2} = 2 \qquad | \cdot (x+4)^2$

$(2x-3)(x+4) + 11 = 2(x+4)^2$

$2x^2 - 3x + 8x - 12 + 11 = 2(x^2 + 8x + 16)$

$2x^2 + 5x - 1 = 2x^2 + 16x + 32$

$-11x = 33$

$x = -3$

$L = \{-3\}$

e) $\dfrac{2}{x^2-x} - 2 = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$

$$\frac{2}{x(x-1)} - 2 = \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} \qquad | \cdot x(x-1)(x+1)$$

$$2(x+1) - 2(x-1)(x+1)\cdot x = (3x+1)\cdot x$$

$$2x+2 - 2(x^2-1)\cdot x = 3x^2+x$$

$$2x+2-2x^3+2x = 3x^2+x$$

$$-2x^3+4x+2 = 3x^2+x$$

$$-2x^3-3x^2+3x+2=0$$

Suche Zahlen, die die Gleichung lösen und finde $x_1 = 1$

weil : $-2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 2 = -2-3+3+2 = 0$

und damit das Lösungspolynom $(x-1)$ welches das einfachste Polynom ist, das die Lösung 1 bei $(x-1)=0$ hat.

$$(-2x^3-3x^2+3x+2):(x-1) = -2x^2-5x-2$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(-2x^3+2x^2)} \\
\quad -5x^2+3x+2 \\
\quad \underline{-(-5x^2+5x)} \\
\qquad -2x+2 \\
\qquad \underline{-(-2x+2)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$-2x^2-5x-2=0 \qquad |\cdot(-1)$$

$$2x^2+5x+2=0$$

$$x_{2/3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5\pm 3}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = -2 \end{array}$$

Unglücklicher Weise ist für $x_1 = 1$: $\dfrac{2}{1^2-1} - 2 = \dfrac{3\cdot 1+1}{1^2-1}$

$$\frac{2}{0} - 2 = \frac{4}{0} \quad ↯$$

keine gültige Lösung

$$L = \left\{-2\,;\,-\tfrac{1}{2}\right\}$$