a) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

Symmetrie : $f(-x) = -(-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 5$

$= -x^2 - 4x + 5 \neq f(x)$

$= -(x^2 + 4 - 5) \neq -f(x)$

$\Rightarrow$ keine Symmetrie zum Urspr. oder zur y-Achse

Asymptoten : $\lim\limits_{|x| \to \infty} -x^2 + 4x + 5 \to -\infty$

$\nexists$ Asymptoten

Nullstellen : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2} = 2 \mp 3$

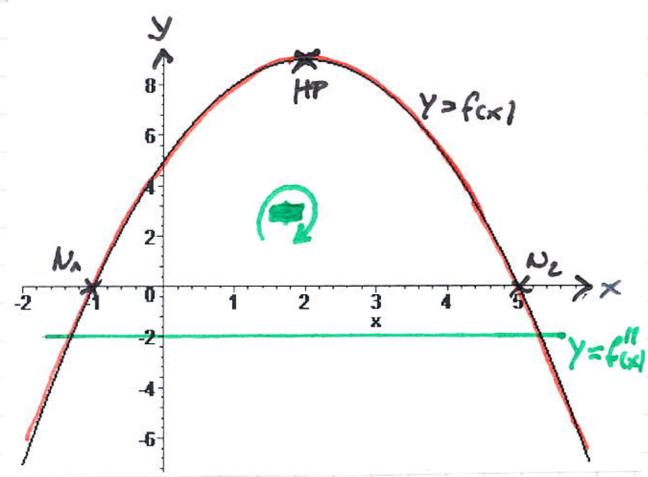
$x_1 = -1 \; ; \; x_2 = 5$ mit $N_1(-1|0), N_2(3|0)$

Ableitungen : $f'(x) = -2x + 4 \quad ; \quad f''(x) = -2$

Extremwerte : $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2 \\ f(2) = -4 + 8 + 5 = 9 \wedge f''(2) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow HP(2|9)$$

Wendepunkte : $\nexists$ WP wegen $f''(x) = -2 \neq 0$



Es gibt nur eine Orientierung, da es keine Wendepunkte gibt.

$f''(x) < 0 \quad \forall x \in D_f$

Es handelt sich also um eine Rechtskurve

b) $\underline{f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

Symmetrie: $f(-x) = -(-x)^3 - 6\cdot(-x)^2 - 9\cdot(-x) = x^3 - 6x^2 + 9x \neq f(x)$

$= -(-x^3 + 6x^2 - 9x) \neq -f(x)$

$\Rightarrow \nexists$ Symmetrie zum Ursprung oder der y-Achse

Asymptoten: $\lim\limits_{x\to\infty} -x^3 - 6x^2 - 9x \to -\infty \wedge \lim\limits_{x\to -\infty} -x^3 - 6x^2 - 9x \to +\infty$

$\Rightarrow \nexists$ Asymptoten

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 - 6x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow -x(x^2 + 6x + 9) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_{2|3} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = -3 \Rightarrow N_1(0|0), N_2(-3|0)$

Ableitungen: $f'(x) = -3x^2 - 12x - 9$; $f''(x) = -6x - 12$; $f'''(x) = -6$

Extremwerte: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$-3x^2 - 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

$x_{1|2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1$

$x_4 = -3 \Rightarrow f''(-3) = 18 - 12 = 6 > 0 \wedge f(-3) = 27 - 54 + 27 = 0$

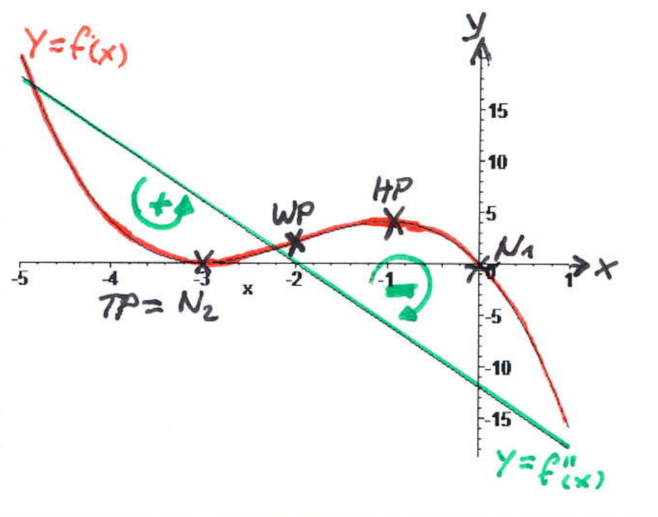
$\Rightarrow TP(-3|0) = N_1$

$x_5 = -1 \Rightarrow f''(-1) = 6 - 12 = -6 < 0 \wedge f(-1) = 1 - 6 + 9 = 4$

$\Rightarrow HP(-1|0)$

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} -6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_6 = -2 \\ f(-2) = 8 - 24 + 18 = 2 \wedge f'''(-2) = -6 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow WP(-2|-2)$



Da es einen Wendepunkt gibt, hat die Kurve zwei verschiedene Orientierungen

Wie die Kurve von $f''(x)$ zeigt:

$\forall x < -2 : f''(x) > 0$

$\Rightarrow$ Rechtskurve

$\forall x > -2 : f''(x) < 0$

$\Rightarrow$ Linkskurve