Lösungen

1 Gleichungen:

a) $x=-\frac{1}{2}$ b) $x=9$ c) $x_1=3$, $x_2=-\frac{1}{2}$

d) $x=7$ e) $x=6$ f) $x=-1$

g) $L=\{...,-\pi,0,\pi,2\pi,...\}$ h) $x_1=-1$, $x_2=1$

i) $L=\{...,-\pi,0,\pi,2\pi,3\pi,...\}$

2 Ableitungen:

a) $f'(x)=6\cdot(2x-1)^2$ $f''(x)=24\cdot(2x-1)$ $f''(x)=48$

b) $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ $f''(x)=\frac{-9}{4(3x-2)\sqrt{3x-2}}$ $f'''(x)=\frac{81}{8(3x-2)^2\sqrt{3x-2}}$

c) $f'(x)=2\cdot\sin(1-x)-2x\cdot\cos(1-x)$ $f''(x)=2\cos(1-x)-2\cdot\cos(1-x)-2x\cdot\sin(1-x)$
$=-2x\cdot\sin(1-x)$

d) $f'(x)=\frac{-4}{(3x-2)^2}$ $f''(x)=\frac{24}{(3x-2)^3}$ $f''(x)=\frac{-216}{(3x-2)^4}$

3 Stammfunktionen:

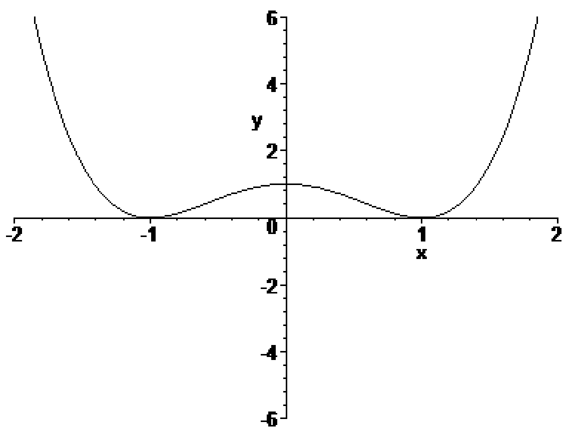
a) $F(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ b) $F(x)=\frac{2}{3}(x-7)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{(x-7)^3}=\frac{2}{3}(x-7)\sqrt{(x-7)}$

c) $F(x)=-\frac{5}{4}x^{-2}=\frac{-5}{4\cdot x^2}$ d) $F(x)=-\frac{2}{3}(3x+1)^{-1}=\frac{-2}{3\cdot(3x+1)}=\frac{-2}{9x+3}$

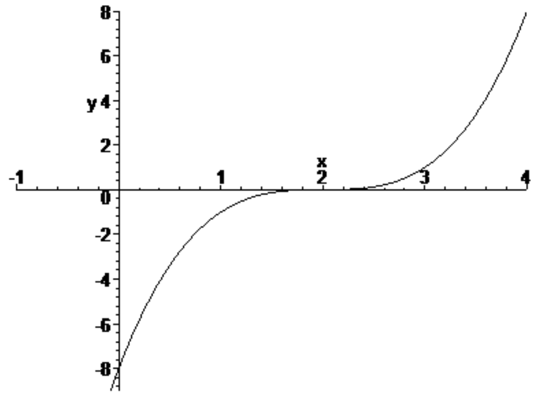
e) $F(x)=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{(2x-1)}$

4 Berechne Symmetrie, Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte

a) Wegen $f(x)=f(-x)$ ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.
$N_1(-1|0)$ und $N_2(1|0)$ sind Schnittpunkte mit der x-Achse
$x_1=-1$ und $x_2=0$ und $x_3=1$ sind Extremwerte, mit $TP_1(-1|0)$, $TP_2(1|0)$ und HP(0|1)
Wendepunkte sind $WP_1\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{4}{9}\right)$ und $WP_1\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{4}{9}\right)$
$\lim_{x\to\infty} f(x)\to+\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)\to+\infty$
Wertebereich $W=\Re_0^+=\{x\in\Re|x\geq 0\}$



b) Die Funktion ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Orego. Durch Einsetzen von Werten findet sich N(2|0), weitere Nullstellen lassen sich auch durch Polynomdivision mit Ergebnis $f(x)=\left(x^2-4x+4\right)\cdot(x-2)$ nicht finden, da $x^2-4x+4=0$ als Ergebnis wiederum nur $x=2$ aufweist.
Anwärter für eine Extremstelle ist x=2. Allerdings ist $f''(2)=0$ und die Untersuchung auf einen VZW an dieser Stelle scheitert. Es gibt also keine Extremstellen.
Dafür ist W(2|0) Wendepunkt und wegen $f'(2)=0$, also weil die Wendetangente parallel zur x-Achse ist, gleichzeitig sogar Sattelpunkt.
Wertebereich $W=\mathfrak{R}$, die Menge aller reellen Zahlen.



5 Tangente und Normale

a) Tangente in $B\left(\frac{1}{2}|1\right)$ ist $t: y=-2x+2$

b) Normale in $P\left(-\frac{1}{4}|-2\right)$ mit $m=\frac{-1}{f'\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{8}$ ist $t: y=\frac{1}{8}x-\frac{63}{32}$ (also $t: y\approx\frac{1}{8}x-2$ zum Zeichnen)

c) Der Wendepunkt ist $WP(-1|1)$, damit wird $f'(-1)=-2$ und die Wendetangente ist $t: y=-2x-1$

d) Berührpunkte sind $B_1(1|1)$ und $B_1(-1|1)$. Damit ergeben sich zwei Tangenten von außerhalb durch $P(0|-1)$ nämlich $t_1: y=2x-1$ und $t_2: y=-2x-1$.

e) Der Standartansatz mit $\frac{f(x)-y_P}{x-x_P}=f'(x)=\frac{3}{2}x^2$ führt auf die Gleichung $x^3-\frac{3}{2}x^2-2=0$.
Versuchsweises Einsetzen führt zur Lösung $x=2$. Die Polynomdivision durch $(x-2)$ auf die Gleichung $x^2+\frac{1}{2}x+1=0$, welche keine weitere Lösung bietet. Einziger Berührpunkt ist also $B(2|4)$ und damit ist die gesuchte Tangente $t: y=6x-8$.

6 Flächeninhalte:

a) $A_0(1)=\frac{3}{4}$ b) $A_0(2)=|-6|=6$ c) $A_0(1)=\int_0^1 g(x)-f(x)\,dx=\frac{3}{4}$

d) $D_f=R\setminus\{-1\}$ und x=1 ist Polasymptote.
Aus $2x+1-\frac{1}{(x+1)^2}$ =0 folgt x=0, also N(0|0).
$f'(x)=2+\frac{2}{(x+1)^3}$ und $f''(x)=\frac{-6}{(x+1)^4}$ damit existiert der Hochpunkt HP(-2|-4)
Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$ ist $y=a(x)=2x+1$ schiefe Asymptote.
$A_b=\int_0^b y-f(x)dx=\int_0^b a(x)-f(x)dx=\int_0^b \frac{1}{(x+1)^2}dx=\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^b=1-\frac{1}{b+1}$
$A_{+\infty}=\lim\limits_{b\to\infty}1-\frac{1}{b+1}=1$ also existiert der uneigentliche Flächeninhalt.
$A_{-1}=\lim\limits_{c\to-1}-\left(1-\frac{1}{c+1}\right)\to\infty$ also existiert dieser uneigentliche Flächeninhalt nicht!