$\boxed{6.2.1}$

a) Nullstellen des Nenners : $x^2 + 3t^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \underbrace{-\underbrace{3t^2}_{>0}}_{<0} \Rightarrow$ nicht lösbar

Definitionsbereich $D_{f_t} = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \nexists$ Polasymptoten

Symmetrie : $f_t(-x) = \frac{t^4}{(-x)^2 + 3t^2} = \frac{t^4}{x^2 + 3t^2} = f_t(x)$

$\Rightarrow$ K_t ist symmetrisch zur y-Achse

Nullstellen : $f_t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{t^4}{x^2+3t^2} = 0 \Leftrightarrow t^4 = 0$ aber $t > 0$

$\Rightarrow \nexists$ Schnittpunkte mit der x-Achse

$$f_t'(x) = \frac{0 - t^4 \cdot 2x}{(x^2 + 3t^2)^2} = \frac{-2t^4x}{(x^2+3t^2)^2}$$

$$f_t''(x) = \frac{-2t^4 \cdot (x^2+3t^2)^2 + 2t^4x \cdot 2 \cdot 2x(x^2+3t^2)}{(x^2+3t^2)^4} = \frac{(-2t^4(x^2+3t^2) + 8t^4x^2) \cdot (x^2+3t^2)}{(x^2+3t^2)^4}$$

$$= \frac{-2t^4x^2 - 6t^6 + 8t^4x^2}{(x^2+3t^2)^3} = \frac{6t^4(x^2-t^2)}{(x^2+t^2)^3}$$

Extremwerte : $f_t'(x) = 0 \wedge f_t''(x) \neq 0$

$$\frac{-2t^4x}{(x^2+3t^2)^3} = 0 \quad | \cdot (x^2+3t^2)^3 \Leftrightarrow -2t^4x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$f_t''(0) = \frac{6t^4(0-t^2)}{(0+t^2)^3} = \frac{-6t^6}{t^6} = -6 < 0 \Rightarrow HP(0 \mid \tfrac{1}{3}t^2)$$

$$f_t(0) = \frac{t^4}{0 + 3t^2} = \frac{1}{3}t^2$$

Wendepunkte : $f_t''(x) = 0 \wedge f_t'''(x) \neq 0$

$$\frac{6t^4(x^2-t^2)}{(x^2+t^2)^3} = 0 \Leftrightarrow 6t^4(x^2-t^2) \Leftrightarrow x^2 = t^2 \Leftrightarrow x_2 = t \wedge x_3 = -t$$

$f_t(t) = \frac{t^4}{t^2+3t^2} = \frac{1}{4}t^2 = f_t(-t)$ aus Symmetriegründen

$$f_t'''(x) = \frac{6t^4 \cdot 2x(x^2+3t^2)^3 - 6t^4(x^2-t^2) \cdot 3 \cdot 2x \cdot (x^2+3t^2)^2}{(x^2+3t^2)^6}$$

$$= \frac{12t^4x^3 + 36t^6x - 36t^4x^3 + 36t^6x}{(x^2+3t^2)^4} = \frac{24t^4(-x^3+3t^2x)}{(x^2+3t^2)^4}$$

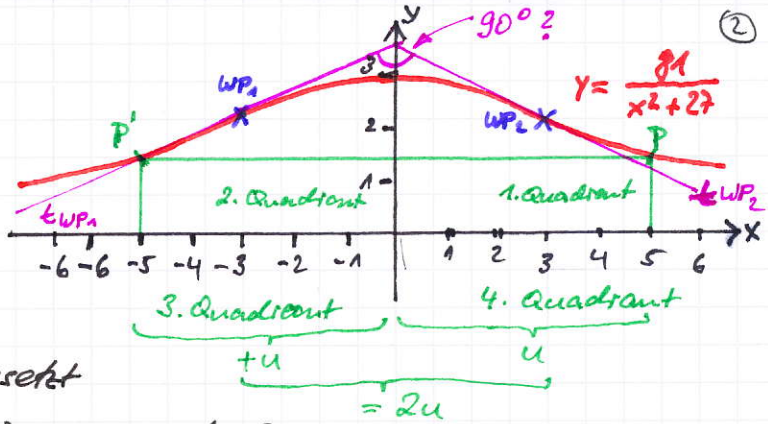
$-f_t'''(-t) = f_t'''(t) = \frac{24t^4(-t^3+3t^3)}{(t^2+3t^2)^4} = \frac{48t^7}{256t^8} = \frac{3}{16}t^5 \neq 0$ da $t \neq 0$

aus Symmetriegründen

$\Rightarrow WP_{t1}(t \mid \tfrac{1}{4}t^2) \wedge WP_{t2}(-t \mid \tfrac{1}{4}t^2)$

Asymptoten: $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{t^4}{x^2+3t^2} = 0$

$\Rightarrow y=0$ ist waagrechte Asymptote



b) $WP_t\left(\pm t \,\middle|\, \frac{t^2}{4}\right)$

$\hookrightarrow y = \frac{1}{4}t^2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(\pm x)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$ ist die Ortskurve aller WP_t, darauf liegen also alle Wendepunkte

$t = \pm x$ eingesetzt

$\hookrightarrow x = \pm t \quad \Leftrightarrow \pm x = t$

Steigung t_{WP_2}: $f_t'(t) = \frac{-2t^5}{(t^2+3t^2)^2} = \frac{-2t^5}{16t^4} = -\frac{1}{8}t$ und t_{WP_1}: $f_t'(-t) = \frac{1}{8}t$

für $\alpha = 90° \Rightarrow f_t'(t)\cdot f_t'(-t) = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}t\cdot\frac{1}{8}t = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{64}t^2 = -1 \Leftrightarrow t^2 = 64$

$\Rightarrow t_1 = 8 \;\wedge\; [t_2 = -8]$ wegen $t > 0$

c) $P\left(u \,\middle|\, \frac{t^2}{u^2+3t^2}\right) \Rightarrow A(u) = (2u)\cdot\frac{t^4}{u^2+3t^2} = \frac{2ut^4}{u^2+3t^2}$ für $u > 0$

$A'(u) = \frac{2t^2(u^2+3t^2) - 2t^4u\cdot 2u}{(u^2+3t^2)^2} = \frac{2t^4(3t^2-u^2)}{(u^2+3t^2)^2}$

$A''(u) = \frac{4t^2(u^3-9t^2u)}{(u^2+3t^2)^3}$

$A'(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^4(3t^2-u^2)}{(u^2+3t^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 3t^2-u^2 = 0 \Leftrightarrow u^2 = 3t^2 \Leftrightarrow u_1 = t\sqrt{3}$

aber $u > 0$ $[u_2 = -t\sqrt{3}]$

$A''(t\sqrt{3}) = \frac{4t^2(t^3 3\sqrt{3} - t^3\cdot 9\sqrt{3})}{(3t^2+3t^2)^2} = \frac{4t^2(-6\sqrt{3}\cdot t^3)}{36t^2} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,t^3 \neq 0$ da $t \neq 0$ und $t > 0$

$< 0 \Rightarrow$ Maximum für $t > 0$

$\Rightarrow$ maximaler Flächeninhalt für $u = t\sqrt{3}$

Quadrat mit gleich langen Kanten $\Rightarrow 2u = \frac{t^4}{u^2+3t^2} \Leftrightarrow 2u^3 + 6t^2u = t^4$

$\Rightarrow u = t\sqrt{3} \Rightarrow 2t^3\cdot 3\sqrt{3} + 6t^2\cdot t\sqrt{3} = t^2 \quad \Leftrightarrow 12\sqrt{3}\,t^3 = t^4 \quad |: t^3 \neq 0$

$\Rightarrow 12\sqrt{3} = t$ ist ein Quadrat mit maximalem Inhalt

d) Für $x > 0$: $g(x) > f_3(x) \Leftrightarrow \frac{27}{4x} > \frac{81}{x^2+27} \Leftrightarrow 27x^2 + 27^2 > 4\cdot 81x \quad |:27$

$\Leftrightarrow x^2 + 27 > 12x \Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 > 0 \Rightarrow x_{1|2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-108}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2}$

$\Rightarrow$ für Gleichheit $x_{1|2} = 6 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 9 \;\wedge\; x_2 = 3 \Rightarrow (x-9)(x-3) = 0$

gesucht ist aber $\underbrace{(x-9)}_{①}\underbrace{(x-3)}_{②} > 0$ mit

① > 0 : $x > 9$; ② > 0 : $x > 3$ $\Big\}$ „$+\cdot+$" ①·② > 0 : $x > 9$

① < 0 : $x < 9$; ② < 0 : $x < 3$ $\Big\}$ „$-\cdot-$" ①·② > 0 : $x < 3$

und $x > 0$

e) Da wegen $HP_3(0|3)$ mit globalem Hochpunkt $f(x) \leq 3$ und $y = 0$ waagrechter Asymptote $f(x) > 0$ $\Big\}$ $W_3 = \{0 < \tilde{x} \leq 3\}$ für $\tilde{x} \in \mathbb{R}$