A 2.2.1 $\quad f_t(x) = \frac{x}{x^2+t} \quad t>0$

a) Definitionsbereich: $x^2+t=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-t}$ nicht lösbar, da die Diskriminante <0

$$D_{f_t} = \mathbb{R}$$

Symmetrie: $f_t(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+t} = -\frac{x}{x^2+t} = -f_t(x)$

Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Nullstellen: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x}{x^2+t}=0 \;|\cdot(x^2+t) \Leftrightarrow x_1=0 \Rightarrow N(0|0)$

$$f_t''(x) = \frac{-2x(x^2+t) - (-x^2+t)\cdot 2\cdot 2x\cdot(x^2+t)}{(x^2+t)^4} = \frac{(x^2+t)\left(-2x(x^2+t)-4x(-x^2+t)\right)}{(x^2+t)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2+t)-4x(-x^2+t)}{(x^2+t)^3} = \frac{-2x^3-2tx+4x^3-4tx}{(x^2+t)^3} = \frac{2x^3-6tx}{(x^2+t)^3}$$

$$f_t'(x) = \frac{x^2+t-(x\cdot 2x)}{(x^2+t)^2} = \frac{-x^2+t}{(x^2+t)^2}$$

Extremwerte: $f_t'(x)=0 \wedge f_t''(x)\neq 0$

$$\frac{-x^2+t}{(x^2+t)^2}=0 \Leftrightarrow x^2+t=0 \Leftrightarrow x^2=t \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{t}$$

$$f_t''(\sqrt{t}) = \frac{2t\sqrt{t}-6t\sqrt{t}}{(t+t)^3} = -\frac{4t\sqrt{t}}{8t^3} = -\frac{\sqrt{t}}{2t^2} = -\underbrace{\frac{1}{2t\sqrt{t}}}_{>0} < 0$$ da $t>0$

$$\Rightarrow HP\left(\sqrt{t} \,\Big|\, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$f_t(\sqrt{t}) = \frac{\sqrt{t}}{t+t} = \frac{\sqrt{t}}{2t} = \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$\Rightarrow TP\left(-\sqrt{t} \,\Big|\, \frac{-1}{2\sqrt{t}}\right)$ aus Symmetriegründen

$$f_t'''(x) = \frac{(6x^2-6t)(x^2+t)^3-(2x^3-6tx)(x^2+t)^2\cdot 6x}{(x^2+t)^6} = \frac{(6x^2+6t)(x^2+t)-6x(2x^3-6tx)}{(x^2+t)^4}$$

$$= \frac{6x^4-6tx^2+6tx^2-6t^2-12x^4+36tx^2}{(x^2+t)^4} = \frac{-6x^4+36tx^2-6t^2}{(x^2+t)^4}$$

Wendepunkte: $f_t''(x)=0 \wedge f_t'''(x)\neq 0$

$$\frac{2x^3-6tx}{(x^2+t)^3}=0 \Leftrightarrow 2x^3-6tx=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-3t) \Rightarrow x_2=0$$

$$\Rightarrow x_{3|4} = \pm\sqrt{3t}$$

$f_t'''(0) = \frac{-6t^2}{t^4} = \frac{-6}{t^2} \neq 0$ da $t>0$ $\Rightarrow W_1(0|0)$

$f_t'''(\sqrt{3t}) = \frac{-18\cdot 3\cdot t^2 + 108t^2 - 6t^2}{(3t+t)^3} = \frac{48t^2}{64t^3} = \frac{3}{4t} \neq 0$ da $t>0$

$$f_t(\sqrt{3t}) = \frac{\sqrt{3t}}{3t+t} = \frac{\sqrt{3t}}{4t} = \sqrt{\frac{3}{16t}} \Rightarrow W_2\left(\sqrt{3t} \,\Big|\, \sqrt{\frac{3}{16t}}\right)$$

und aus Symmetriegründen $W_3\left(-\sqrt{3t} \,\Big|\, -\sqrt{\frac{3}{16t}}\right)$

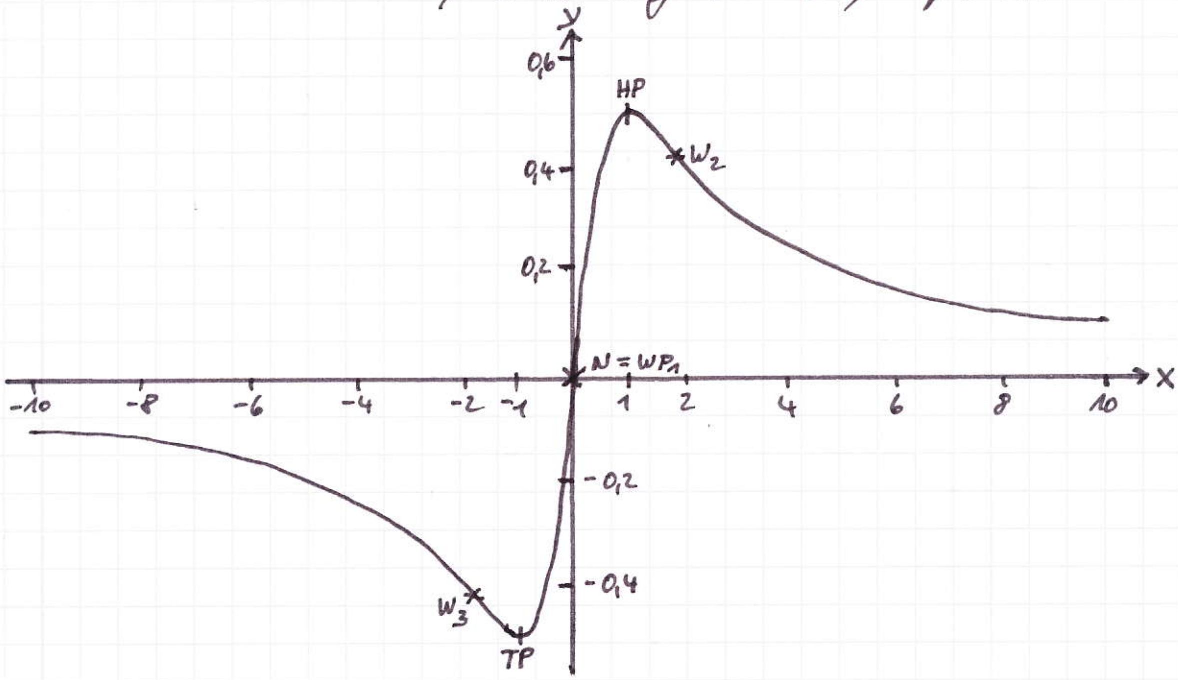
Asymptoten: senkrechte Polasymptoten gibt es nicht

konstant $\neq 0$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{x}{x^2+t} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x\cdot\frac{1}{x}}{(x^2+t)\frac{1}{x}} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\underbrace{x+\frac{t}{x}}_{\to\pm\infty}} = 0$$

$$x \to \pm\infty, \quad \frac{t}{x} \to 0$$

Die x-Achse $y=0$ ist waagrechte Asymptote



b) Wertemenge für $t=1$ $\Rightarrow$ $HP(1\,|\,\frac{1}{2})$, $TP(-1\,|\,-\frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ $W = \{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$

oder $W = \{y\in\mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$

Obwohl die Wertemenge die Menge aller y-Werte, also Funktionswerte $f(x)$ ist, darf bei der Angabe der Menge intern jeder beliebige Variablenname verwendet werden. (z.B. auch $W = \{r\in\mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$; $W = \{julia \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq julia \leq \frac{1}{2}\}$

c) $HP_t\left(\underset{x}{\sqrt{t}} \,\middle|\, \underset{y}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}\right)$ $\Rightarrow x = \sqrt{t} \Rightarrow t = x^2$ mit $y = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{2x}$ ist die Ortskurve

d) für $t_1 = t_2$ gilt: $\frac{x}{x^2+t_1} = \frac{x}{x^2+t_2} \;\Big|\cdot(x^2+t_1)(x^2+t_2) \Leftrightarrow \frac{x(x^2+t_1)(x^2+t_2)}{x^2+t_1} = \frac{x(x^2+t_1)(x^2+t_2)}{x^2+t_2}$

$\Leftrightarrow x(x^2+t_2) = x(x^2+t_1) \Leftrightarrow x(x^2+t_2) - x(x^2+t_1) = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2+t_2-x^2-t_1) = 0 \Leftrightarrow x(t_2-t_1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ist die einzige Lösung da $t_1 \neq t_2$

$\Rightarrow S(0\,|\,0)$ ist gemeinsamer Schnittpunkt aller Kurven K_t, da hier kein Parameter t, weder bei der x- noch bei der y-Koordinate enthalten ist.