7.1.1 LÖSUNGEN

a) $|CD| = d(C,D) = |\vec{CD}| = \left|\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38} \approx 6{,}16$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\5\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$

$$h \cap g: \begin{array}{l} -3-5r = 2-3t \\ 5+2r = 1+t \\ 3+3r = 2+2t \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} -5r+3t = 5 & \\ 2r - t = -4 & | \cdot 3 \\ 3r - 2t = -1 & \\ \hline 2r - t = -4 & \Rightarrow -14 - t = -4 \Rightarrow t = -10 \\ r = -7 & \Rightarrow r = -7 \\ 3r - 2t = -1 & \Rightarrow -21 + 20 = -1 \text{ eine wahre Aussage} \end{array}$$

also ist: $\vec{s} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - 10\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\-9\\-18\end{pmatrix}$ und somit $S(32|-9|-18)$

$\vec{s} = \begin{pmatrix}-3\\5\\3\end{pmatrix} - 7\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32\\-9\\-18\end{pmatrix}$ der Schnittpunkt von h und g : $h \cap g = \{S\}$

c) Prüfe zuerst, ob die Richtungsvektoren $\vec{u}_h$ und $\vec{u}_g$ Vielfache voneinander sind. Ist dies der Fall, so gilt $g = h$ oder aber $g \parallel h$.
Stelle das lineare Gleichungssystem $\vec{P}_h + r\cdot\vec{u}_h = \vec{P}_g + t\cdot\vec{u}_g$ auf und gewinne mit der 1. und 2. Gleichung Lösungen für r und t.
Teste durch Einsetzen von r und t in die 3. Gleichung, ob sich damit eine wahre Aussage ergibt.
Ist die Aussage wahr und $\vec{u}_h = k\cdot\vec{u}_g$ so ist $g = h$
ist jedoch $\vec{u}_h \neq k\cdot\vec{u}_g$ dann schneiden sich g und h
Ist die Aussage falsch und $\vec{u}_h = k\cdot\vec{u}_g$ so ist $g \parallel h$
ist jedoch $\vec{u}_h \neq k\cdot\vec{u}_g$ dann sind g und h windschief

d)
$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}\right|} = \frac{|15+2+6|}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{25+4+9}} = \frac{23}{\sqrt{532}} \approx 0{,}997$$

$\sphericalangle(g,h) = \alpha \approx 4{,}07^\circ$ ist der Schnittwinkel e)

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$k \cap g: \begin{array}{l} -3 + r = 2 - 3t \\ 5 + 2r = 1 + t \\ 1 + 3r = 2 + 2t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} r + 3t = 5 \\ 2r - t = -4 \quad |\cdot 3 \\ 3r - 2t = 1 \end{array} \Big] +$$

$$\begin{array}{l} r + 3t = 5 \qquad \Rightarrow -\frac{9}{7} + 3t = \frac{35}{7} \Rightarrow t = \frac{44}{21} \\ 7r = -9 \Rightarrow r = -\frac{9}{7} \\ 3r - 2t = 1 \Rightarrow -\frac{27}{7} - \frac{88}{21} = -\frac{169}{21} \neq 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \nexists$ Schnittpunkt

$$k \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow k = -3 \\ \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{array} ↯ \Rightarrow k \text{ und } g \text{ sind windschief}$$

f)

da $-3 \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-3\\-6\end{pmatrix}$ also $-3 \cdot \vec{u}_g = \vec{u}_l$ sind die Richtungsvektoren (parallel) linear abhängig

Die Einsetzungsprobe $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}9\\-3\\-6\end{pmatrix} \Leftrightarrow t\begin{pmatrix}9\\-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow t = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow t = \frac{2}{3} \end{array}$

zeigt, dass der Stützpunkt von l auf g liegt $\Rightarrow g = l$

g)

da $-2 \cdot \begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-4\\-6\end{pmatrix}$ sind die Richtungsvektoren parallel

Die Inzidenzprobe $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow r = \frac{-6}{5} \\ \Rightarrow r = -2 \end{array}$ ↯

zeigt, $P_m \notin h \Rightarrow h \parallel m$

h)

$l^*: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}9\\-3\\-6\end{pmatrix}$ oder auch $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$

i)

$$n_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\-4\\-6\end{pmatrix}$$

$$n_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\cdot(-2)$

Ändert man die Koordinate eines Punktes in genau einer Dimension um 2, dann ist der neue Punkt exakt 2 LE vom ursprünglichen Punkt entfernt.

j) $\vec{u}_m = \begin{pmatrix} +10 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ für die Gerade o gilt $o \perp m \Leftrightarrow \vec{u}_o \cdot \vec{u}_m = 0$

also $\begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10o_1 - 4o_2 - 6o_3 = 0 \quad |:(-2)$

$-5o_1 + 2o_2 + 3o_3 = 0$

wähle $o_1 = 0 \Rightarrow 2o_2 + 3o_3 = 0$

wähle $o_2 = -3 \Rightarrow -6 + 3o_3 = 0 \Rightarrow o_3 = 2$

also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht zu $\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

wähle $o_1 = 1 \Rightarrow 2o_2 + 3o_3 = 5$

wähle $o_2 = 1 \Rightarrow 2 + 3o_3 = 5 \Rightarrow o_3 = 1$

damit ist auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht zu $\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow o_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $o_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind senkrecht

zu m mit Schnittpunkt (3|1|1) da ja dieser Punkt ganz offensichtlich (... für t=0) auf m liegt.

k) $o \perp m \Leftrightarrow \vec{u}_o \cdot \vec{u}_m = 0 \Leftrightarrow 10o_1 - 4o_2 - 6o_3 = 0 \quad |:(-2)$

$o \perp l \Leftrightarrow \vec{u}_o \cdot \vec{u}_l = 0 \Leftrightarrow 9o_1 - 3o_2 - 6o_3 = 0 \quad |:3$

$$\begin{aligned} -5o_1 + 2o_2 + 3o_3 &= 0 \\ 3o_1 - o_2 - 2o_3 &= 0 \quad |\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3o_1 - o_2 - 2o_3 &= 0 \\ o_1 \quad - o_3 &= 0 \end{aligned}$$ wähle $o_1 = 1$

$$\begin{aligned} 3o_1 - o_2 - 2o_3 &= 0 \\ 1 \quad - o_3 &= 0 \Rightarrow o_3 = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 3 - o_2 - 1 = 0 \Rightarrow o_2 = 2$

$\Rightarrow \vec{u}_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zu $\vec{u}_m$ und gleichzeitig senkrecht zu $\vec{u}_l$

Damit ist $o: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowohl senkrecht zur Geraden m, als auch zur Gerade l und hat mit m den Schnittpunkt S(3|1|1).

Hat o auch einen gemeinsamen Punkt mit l?

l) $(F,G) = \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-9\\3\\6\end{pmatrix}$

Inzidenzprobe : $\begin{pmatrix}-13\\6\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-9\\3\\6\end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix}\Rightarrow t=2\\ \Rightarrow t=2\\ \Rightarrow t=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow H \in (F,G)$

$\Leftrightarrow$ F, G, H sind kollinear

m) $(LM): \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{OL}\text{ der Stützpunkt der Gerade (LM)}} + t\begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix}$ oder aber $(LM): \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$

Für N : $\begin{pmatrix}7\\9\\-11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix}\Rightarrow t=-4\\ \Rightarrow t=-4\\ \Rightarrow t=-\frac{12}{3}=-4\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ L, M, N liegen auf einer Gerade, sie sind kollinear

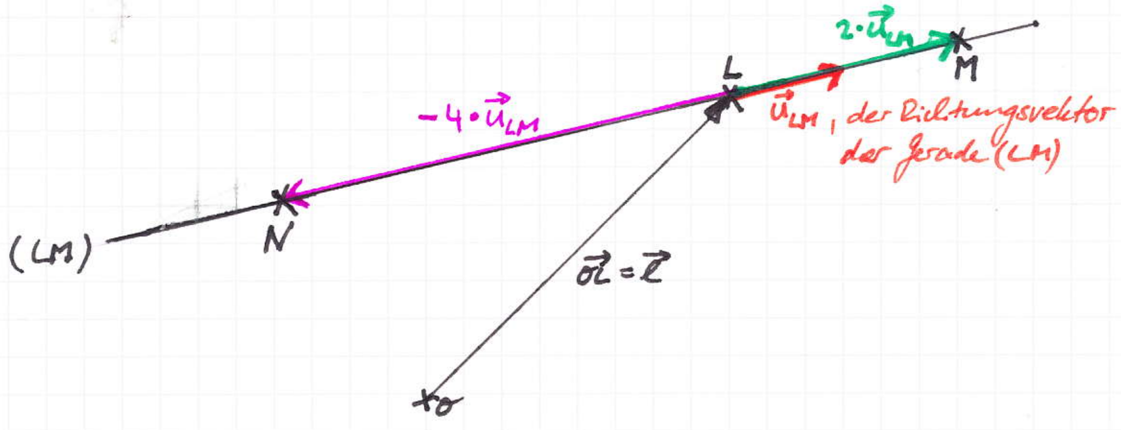
Für K : $\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix}\Rightarrow t=-2\\ \Rightarrow t=-2\\ \Rightarrow t=\frac{2}{3}\end{matrix}\ \lightning\right\} \Rightarrow$ L, M, N und K liegen nicht auf einer Gerade

Berechne nun t_L, t_M, t_N bezüglich der Gerade (LM)

$t_L = 0$

$t_N = -4$ siehe oben

$t_M : \begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix}\Rightarrow t=2\\ \Rightarrow t=2\\ \Rightarrow t=2\end{matrix}\right\}$ also $t_M = 2$



Damit liegt der Punkt L zwischen den beiden Punkten N und M und <u>nicht</u> außerhalb der Strecke MN.