7.2.1 Lösungen

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-12\\-6\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} x_1 = 3 - 12r + 3s \\ x_2 = 3 - 6r + 3s \quad |\cdot(-1) \\ x_3 = -2 + 4r \\ \hline x_1 - x_2 = \quad -6r \quad |\cdot 2 \\ x_3 = -2 + 4r \quad |\cdot 3 \\ \hline \end{array}$$

$E_1: \; 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6$

$D: \; 6 - 10 - 3 = -7 \neq -6 \Rightarrow D \notin E_1$

$E: \; -14 - 16 + 24 = -6 \Rightarrow E \in E_1$

b) $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + r\underbrace{\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}}_{\vec{u}} + s\underbrace{\begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow & 4n_1 + 2n_2 + 6n_3 = 0 \\ \vec{v} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow & 6n_1 - 3n_2 - 3n_3 = 0 \quad |\cdot 2 \\ \hline & 4n_1 + 2n_2 + 6n_3 = 0 \\ & 16n_1 - 4n_2 \qquad = 0 \Leftrightarrow 4n_1 - n_2 = 0 \text{ es sei } n_1 = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow 4 - n_2 = 0 \Leftrightarrow n_2 = 4$

$\Rightarrow 4 + 8 + 6n_3 = 0 \Rightarrow 12 + 6n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = -2$

$E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} = 0$ die Normalengleichung

$x_1 + 4x_2 - 2x_3 - (2 + 4 + 2) = 0$

$E_2: \; x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8$

c) $E_1 \cap E_2:$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6 \quad |\cdot 2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ \hline x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 \qquad + 4x_3 = -4 \end{array}$$

wähle: $x_1 = 8t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 40t + 4x_3 = -4 \Leftrightarrow 4x_3 = -4 - 40t \Leftrightarrow x_3 = -1 - 10t$

$\Rightarrow 8t + 4x_2 + 2 + 20t = 8 \Leftrightarrow 4x_2 = 6 - 28t \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{2} - 7t$

Schnittgerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}8\\-7\\-10\end{pmatrix}$ also $E_1 \cap E_2 = g$

d) $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ für $\vec{m} \perp \vec{n}_{E_1}$ gilt: $\vec{n}_{E_1} \cdot \vec{m} = 0$

$\Leftrightarrow 2m_1 - 2m_2 + 3m_3 = 0$ sei $m_3 = 2$, $m_2 = 1$

$\Rightarrow 2m_1 - 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 2m_1 = -4$

$\Leftrightarrow m_1 = -2$

$\Rightarrow E_{senkrecht_1}: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-7\\8\\8\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = 0$

oder $E_{senkrecht_1}: -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 30$

oder: $2m_1 - 2m_2 + 3m_3 = 0$ mit $m_3 = 2$, $m_2 = 2$

$\Rightarrow 2m_1 - 4 + 6 = 0 \Leftrightarrow 2m_1 = -2$

$\Leftrightarrow m_1 = -1$

$\Rightarrow E_{senkrecht_2}: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-7\\8\\8\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = 0$

oder $E_{senkrecht_2}: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 23$

e) $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ für $\vec{n}_{E_1} \perp \vec{m}$: $\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2m_1 - 2m_2 + 3m_3 = 0 \quad |\cdot 2$ $+$

$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$ für $\vec{n}_{E_2} \perp \vec{m}$: $\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}m_1\\m_2\\m_3\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow m_1 + 4m_2 - 2m_3 = 0$

$m_1 + 4m_2 - 2m_3 = 0$

$5m_1 \quad + 4m_2 = 0$ mit $m_1 = 4$

$\Rightarrow 4 + 4m_2 - 2m_3 = 0$

$\Rightarrow 20 \quad + 4m_2 = 0 \Leftrightarrow m_2 = -5$

$\Rightarrow 4 - 20 - 2m_3 = 0$

$\Rightarrow \quad -2m_3 = 16$

$\Rightarrow m_3 = -8$

$\Rightarrow E_{senkrecht\, E_1, E_2}: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-7\\8\\8\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}4\\-5\\-8\end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-5\\-8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-7\\8\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-5\\-8\end{pmatrix} = 0$

$4x_1 - 5x_2 - 8x_3 - (-28 - 40 - 64) = 0$

$4x_1 - 5x_2 - 8x_3 = -132$ ist die gesuchte Ebene

f) Die Ebene E_3 ist parallel zur x_3-Achse des Koordinatensystems.

Spurpunkte E_3: $x_1 = 0 \Rightarrow -2x_2 = -9 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow D_2(0|\frac{9}{2}|0)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -9 \Rightarrow D_1(-9|0|0)$

Spurpunkte E_1: $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6$

$x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \Rightarrow D_1(-3|0|0)$

$x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow D_2(0|3|0)$

$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 \Rightarrow D_3(0|0|-2)$

Schnittgerade $g = E_1 \cap E_3$: $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6$

$x_1 - 2x_2 = -9$ es sei $x_2 = 3t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_1 - 6t = -9 \Leftrightarrow x_1 = -9 + 6t$

$\Rightarrow 2(-9+6t) - 2 \cdot 3t + 3x_3 = -6$

$-18 + 12t - 6t + 3x_3 = -6$

$-18 + 6t + 3x_3 = -6$

$3x_3 = 12 - 6t$

$x_3 = 4 - 2t$

$$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

g) E_4: $D_{41}(4|0|0)$ $D_{42}(0|5|0)$ $D_{43}(0|0|5)$

E_5: $D_{52}(0|3|0)$ $D_{53}(0|0|5)$

$E_4 \cap E_5$: $5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 20$

$5x_2 + 3x_3 = 15$ wähle $x_2 = 3t \in \mathbb{R}$

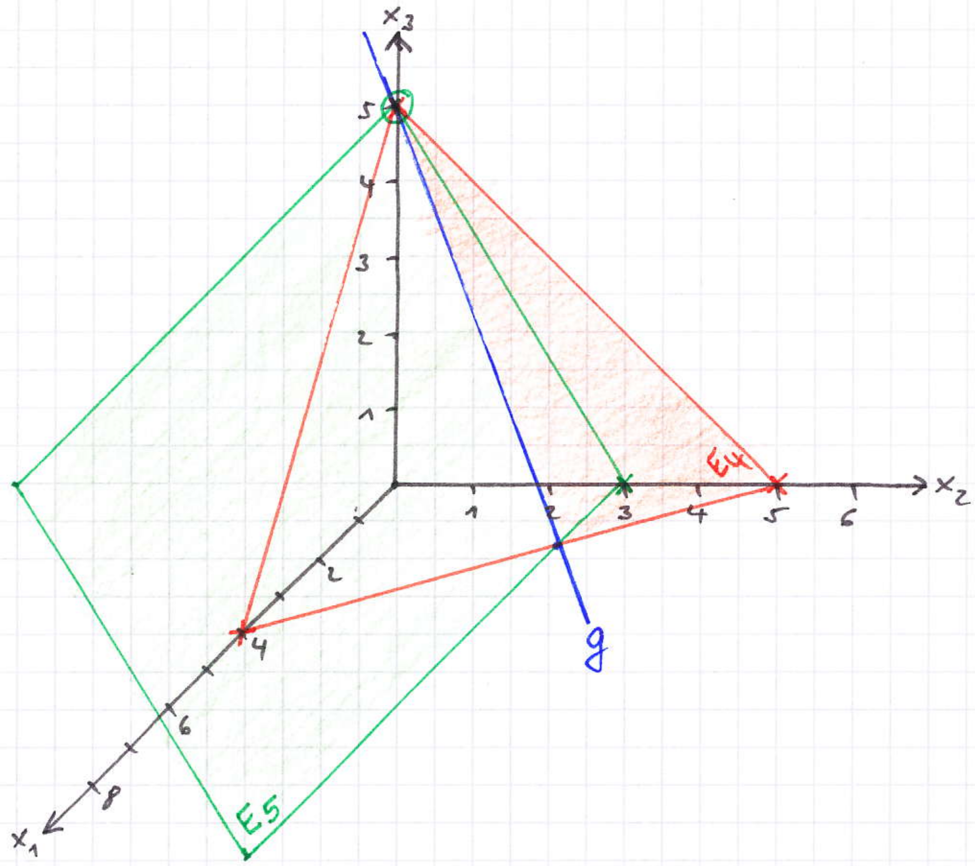
$\Rightarrow 15t + 3x_3 = 15 \Leftrightarrow 3x_3 = 15 - 15t \Leftrightarrow x_3 = 5 - 5t$

$\Rightarrow 5x_1 + 4 \cdot 3t + 4(5 - 5t) = 20$

$\Rightarrow 5x_1 + 12t + 20 - 20t = 20$

$\Rightarrow 5x_1 - 8t + 20 = 20 \Leftrightarrow 5x_1 = 8t \Leftrightarrow x_1 = \frac{8}{5}t$

$$\text{also ist } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$



h) $E_{6\,\text{parallel}}: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-3\\7\\-2\end{pmatrix} = 0$

Koordinatenform: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\7\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\7\\-2\end{pmatrix} = 0$

$-3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - (-3 + 14 - 6) = 0$

$-3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 5$

i) $-3 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = d$

$\Rightarrow -14 = d \Rightarrow -3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -14$ ist die gesuchte Ebene

Normalenform: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-3\\7\\-2\end{pmatrix} = 0$

$D_1(-7|0|0) \quad D_2(0|3|0) \quad D_3(0|0|-\frac{21}{2})$

also ist $E_7: \vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}7\\0\\-\frac{21}{2}\end{pmatrix}$ die gesuchte Parameterform

j) $P(-3|2|1)$ ist Stützpunkt der Ebene E_g

$Q^*(-3+3|2|1) \Rightarrow Q^*(0|2|1)$ ist von $P(-3|2|1)$ genau 3LE entfernt

also ist $E_{g\,parallel}$: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

oder: $-3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 12$ eine mögliche Ebene mit Abstand 3 LE