Polynomdivision

Eine Polynomdivision kann immer dann ausgeführt werden, wenn der Grad des Nenners eines Bruches größer oder gleich dem Grad des Zählers des Bruches ist.

Der Grad ist der Exponent der größten Potenz z.B. Grad$(x^3-2x)=3$

I

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2 \qquad \frac{-x^2}{x} = -x$$

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 9x^2 + 4x) : (x-4) = 2x^2 - x \\
\underline{-(2x^3 - 8x^2)} \\
\quad 0 \quad -x^2 + 4x \\
\quad \underline{-(-x^2 + 4x)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$2x^3-(2x^3) \rightarrow 0$

also ist: $\dfrac{2x^3 - 9x^2 + 4x}{x-4} = 2x^2 - x$

oder: $2x^3 - 9x^2 + 4x = (x-4)\cdot(2x^2 - x)$

$= (x-4)(2x-1)\cdot x$

II

$(3x^3 - 2x + 20) : (x+2)$

wegen des fehlenden x^2-Terms schreiben wir besser:

$$\begin{array}{l}
(3x^3 + 0 - 2x + 20) : (x+2) = 3x^2 - 6x + 10 \\
\underline{-(3x^3 + 6x^2)} \\
\qquad -6x^2 - 2x + 20 \\
\quad \underline{-(-6x^2 - 12x)} \\
\qquad\qquad 10x + 20 \\
\qquad \underline{-(10x + 20)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

also: $3x^3 - 2x + 20 = (x+2)(3x^2 - 6x + 10)$

III

$$\begin{array}{l}
(4x^3 - x^2 - 1) : (2x-1) = 2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \dfrac{\frac{3}{4}}{2x-1} = 2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \dfrac{3}{8x-4} \\
\underline{-(4x^3 - 2x^2)} \\
\qquad x^2 - 1 \\
\quad \underline{-(x^2 - \frac{1}{2}x)} \\
\qquad\quad \frac{1}{2}x - 1 \\
\qquad \underline{-(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})} \\
\qquad\qquad -\frac{3}{4}
\end{array}$$

IV $(2x^2-5x+5):(x-1) = 2x-3+\frac{2}{x-1}$

$$\begin{array}{l} -(2x^2-2x) \\ \hline \quad -3x+5 \\ \quad -(-3x+3) \\ \hline \qquad 2 \end{array}$$

Die Polynomdivision ist in vielerlei Hinsicht hilfreich, z.B. beim Lösen schwieriger Gleichungen:

$3x^3-2x+20=0$ wir haben keine Lösungsformel dafür, also probieren wir aus und finden: $x=-2$

$\Rightarrow 3\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)+20 = -24+4+20=0$

$x=-2$ löst also die Gleichung.

D.h.: $3x^3-2x+20 = (x-(-2))\cdot(\text{ganzzahliges Polynom}) = 0$

$= \underbrace{(x+2)}\cdot(\text{ganzzahliges Polynom}) = 0$

ist das einfachste Polynom, das bei Einsetzung von $x=-2$ die Lösung $x+2=0$ ergibt.
$-2+2=0$

also muss $(3x^3-2x+20):(x+2)$ ein ganzzahliges Polynom sein

siehe II, es hat als Ergebnis $3x^2-6x+10$

$\Rightarrow 3x^3-2x+20 = (x+2)(3x^2-6x+10) = 0$

1 $\quad x+2=0 \Rightarrow x=-2$
das wissen wir

2 $\quad 3x^2-6x+10=0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot3\cdot10}}{2\cdot3}$$

$$= \frac{6\pm\sqrt{-84}}{6}$$ was leider in $\mathbb{R}$ nicht lösbar ist.

$\Rightarrow$ Die Lösungsmenge der Gleichung $3x^3-2x+20=0$ ist $L=\{-2\}$

Die Polynomdivision hilft uns auch schwierige gebrochen-rationale Funktionen abzuleiten:

$$f(x) = \frac{4x^3 - x^2 - 1}{2x - 1} = 2x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} - \frac{3}{8x-4} \quad \text{laut III}$$

$$f'(x) = 4x + \tfrac{1}{2} + \frac{24}{(8x-4)^2}$$

$$f''(x) = 4 - \frac{384}{(8x-4)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{9216}{(8x-4)^4}$$

was eine Kurvendiskussion möglich macht.

Die Polynomdivision hilft uns außerdem schiefe Asymptoten bei gebrochen-rationalen Funktionen zu finden:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 1} = 2x - 3 + \frac{2}{x-1} \quad \text{mit } D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

an der Stelle 1 hat das Schaubild von f die senkrechte Asymptote $x = 1$ weil $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 1} \to +\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 1} \to -\infty$$

Außerdem steckt in f eine lineare Funktion und der Rest verschwindet für $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \underbrace{2x - 3}_{y = 2x-3} + \underbrace{\frac{2}{x-1}}_{\text{verschwindet für } x \to \pm\infty}$$

$y = 2x - 3$ ist die lineare Funktion

verschwindet für $x \to \pm\infty$ weil: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x-1} = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

Damit nähert sich K_f asymptotisch der Geraden $y = 2x - 3$ oder anders ausgedrückt hat K_f $y = 2x - 3$ als schiefe Asymptote