Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Ereignis, **Wahrscheinlichkeit** und **Summenregel**

Ein idealer Würfel, jeder mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, jede Augenzahl auf genau einer Seite des Würfels, wird geworfen. Bei dem Würfel handelt es sich um einen idealen, sechsseitigen Würfel. Die Wahrscheinlichkeit dass irgend eine Seite nach ein Mal würfeln oben liegt, ist für alle Seiten also gleich groß und jeweils $\frac{1}{6}$.

Die Summe aller möglichen Wahrscheinlichkeiten bei einem Wurf eines Würfels muss jeweils 1 ergeben. Also wäre die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf 1 oder 2 oder 3 oder 4 oder 5 oder 6 gewürfelt wird $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$.

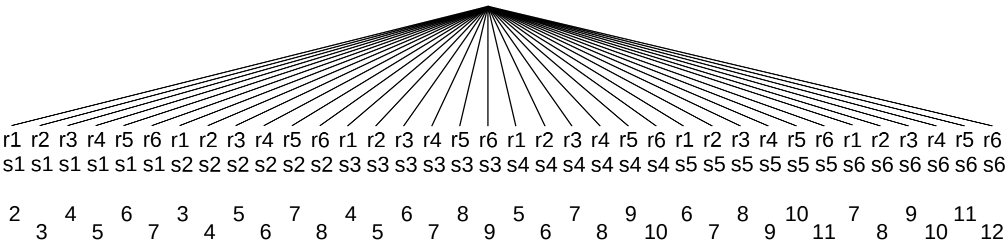
Dabei nennt man die Tatsache, dass z.B. 3 oben liegt, das Eintreten des **Ereignis**ses 3, also $E=\{3\}$.

Die **Wahrscheinlichkeit**, mit der das Ereignis 3 auftritt ist $P(E)=P(\{3\})=\frac{1}{6}$.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller bei einem Wahrscheinlichkeitsexperiment auftretenden Ereignisse, hier:

$$
\begin{aligned}
P_{gesamt}=P(\{1;2;3;4;5;6\}) &= P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)+P(E_5)+P(E_6)\\
&= P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})\\
&= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

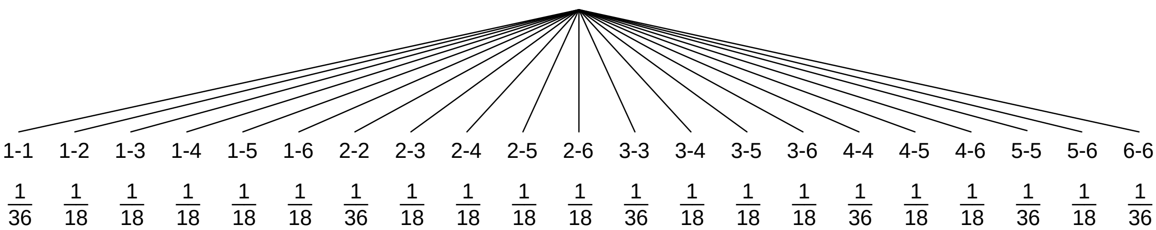
Ein idealer roter r und ein idealer schwarzer s Würfel, jeder mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, jede Augenzahl auf genau einer Seite des Würfels, werden ein Mal zusammen geworfen. Dabei treten die unterscheidbaren Ereignisse **r1-s1, r2-s1, r3-s1, r4-s1, r4-s1, r5-s1, r6-s1, r1-s2, r2-s2, r3-s2, r4-s2, r4-s2, r5-s2, r6-s2, r1-s3, r2-s3, r3-s3, ..., r6-s3, r1-s4, ..., r6-s4, r1-s5, ..., r6-s5, r1-s6, ..., r6-s6** auf.



Hierbei ist unterscheidbar, ob eine Augenzahl auf dem schwarzen oder auf dem roten Würfel gezeigt wird. Es gibt also 36 verschiedene Ereignisse, die alle mit der selben Wahrscheinlichkeit auftreten. Damit ist die Wahrscheinlichkeit des einzelnen Ereignisses P(rj-si) = P(r1-s1) = P(r1-s2) = P(r2-s1) = P(r4-s6) = ... = $\frac{1}{36}$

Haben, wie oben alle Ergebnisse eines Zufallsversuchs die selbe Wahrscheinlichkeit, nennt man es ein **Laplace-Experiment.**

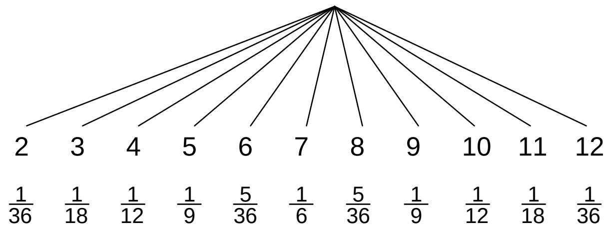
Unternimmt man das selbe Experiment nun mit zwei idealen nicht unterscheidbaren roten Würfeln, ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, weil nicht mehr unterschieden werden kann in welcher Reihenfolge die Zahlen gewürfelt werden. Das Ereignis 1-3 kann nicht vom Ereignis 3-1 unterschieden werden, es gibt also nur ein Ereignis, bei dem die Zahlen 1 und 3 auftauchen. Dafür gibt es dieses Ereignis jetzt mit der doppelten Wahrscheinlichkeit, mit der beispielsweise 4-4 oder 6-6 auftaucht



Es ist also offensichtlich ein Unterschied für den Ausgang eines Wahrscheinlichkeitsexperiments, ob die Reihenfolge des Eintretens der Ergebnisse eine Rolle spielt oder nicht.

Interessiert man sich bei den beiden vorangegangenen Experimenten nur für die geworfene Augensumme bei einem Wurf, dann hängt diese beispielsweise auch nicht von der Reihenfolge ab. Die Augensummen eines Wurfs mit zwei Würfeln sind in der vorseitigen, oberen Abbildung eingetragen. Dabei ergibt sich durch Aufsummieren aller auftretenden Wahrscheinlichkeiten für ein Ereignis:

$$P(2) = \frac{1}{36} = P(12)$$
$$P(3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = P(11)$$
$$P(4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(10)$$
$$P(5) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = P(9)$$
$$P(6) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36} = P(8)$$
$$P(7) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

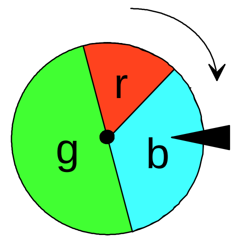


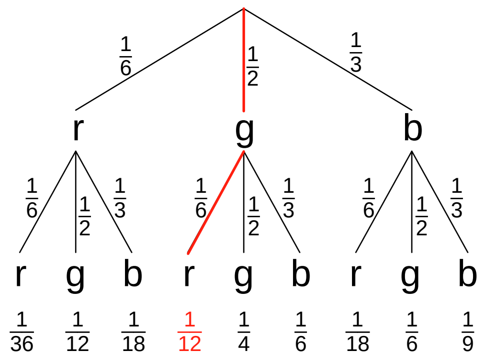
Summenregel: Man bestimmt die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E, indem man alle Einzelwahrscheinlichkeiten der zu E gehörenden Ergebnisse addiert.

Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens unmöglicher Ereignisse, wie $P(1), P(13), P(14), \ldots$ ist dabei Null.

Mehrstufige Experimente und **Pfadregel**

Ein drehbares Glücksrad ist in drei Segmente aufgeteilt. Das grüne überdeckt die Hälfte der Fläche, das blaue $\frac{1}{3}$ und das rote $\frac{1}{6}$. Entsprechend ist $P(g) = \frac{1}{2}$, $P(b) = \frac{1}{3}$ und $P(r) = \frac{1}{6}$ die Wahrscheinlichkeit die entsprechende Farbfläche bei einmaligem Drehen des Rades zu treffen.





Das Rad wird zwei Mal gedreht. Daraus ergibt sich links stehendes Diagramm.
Die Wahrscheinlichkeiten in jeder Stufe müssen über jeden Entscheidungsknoten 1 ergeben. Das stimmt offensichtlich, da $P(r) + P(g) + P(b) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
$= \frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$
und die Wahrscheinlichkeitsverteilung an allen Entscheidungsknoten identisch ist.

Die Wahrscheinlichkeit eines ganzen Pfades, also zuerst g und dann r ergibt sich, indem man bestimmt, wie viel ein Sechstel von der Hälfte ist. Wenn man einen Kuchen zuerst halbiert und dann jede Hälfte in sechs Teile teil, erhält man insgesamt 12 Kuchenstücke.

Also $P(g \to r) = P(g) \cdot P(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, wie in der Abbildung zu sehen. Dies gilt äquivalent für jeden Pfad der Abbildung.

Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Pfades in einem Wahrscheinlichkeitsdiagramm ist das Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten entlang des dieses Pfades.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade muss

$$\begin{aligned} P(ges) &= P(r \to r) + P(r \to g) + P(r \to b) + P(g \to r) + P(g \to g) + P(g \to b) + P(b \to r) + P(b \to g) + P(b \to b) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{36}{36} \\ &= 1 \end{aligned}$$

selbstverständlich wieder 1 ergeben, denn eins der Ergebnisse wird auf jeden Fall eintreffen.